МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДНР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

“ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

ПРОГРАММА, МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К КУРСОВОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ

"Компьютерное моделирование физических процессов"

Утверждено на заседании кафедры
"Электроснабжение промышленных предприятий и городов"
Протокол № 1/16
От 01.09.2016 г.

Донецк, ДонНТУ - 2017

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ ДНР

ДОНЕЦЬКИЙ НАЦИОНАЛЬНИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРОГРАММА, МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ ПО КУРСУ

"Компьютерное моделирование физических процессов"

**(для студентов специальности 7.090603
"Электротехнические системы электропотребления")**

Утверждено на заседании кафедры
"Электроснабжение промышленных предприятий и городов"
Протокол № 1/16
От 01.09.2016 г..

Донецк, ДонНТУ – 2017

УДК 621.31:51(076.5)

Программа, методические указания и задания к курсовой работе по курсу " Компьютерное моделирование физических процессов " (для студентов специальности 7.090603 "Электротехнические системы электропотребления") / Состав .: С.Г.Джура, С.В.Шлепнёв, В.В.Якимишина, Донецк : ДонНТУ, -2016.

Приведены методы анализа, синтеза и оптимизации электрических схем с использованием элементов матричной алгебры. Даны численные методы решения дифференциальных уравнений, вероятностные методы расчеты электротехнических задач.

Составители: С.Г.Джура, доц.

С.В.Шлепнёв, доц.

В.В.Якимишина, ас.

ВСТУПЛЕНИЕ

Назначение курса состоит в том, чтобы связать математику как общетеоретические дисциплину с практическим ее применением в работе инженера-электрика, а также дать будущим инженерам конкретный практический аппарат для инженерных и научных исследований в области электроснабжения промышленных предприятий.

Этот курс является промежуточным между курсами «Высшая математика», «Теоретические основы электротехники», «Введение в специальность», с одной стороны, и курсами специальных дисциплин - с другой. В нем значительно углубляются и расширяются сведения из основных дисциплин в направлении их обобщения и формализации, что необходимо для эффективного применения современных устройств преобразования информации. Тем самым закладывается фундамент для изучения специальных дисциплин.

В курсе «Компьютерное моделирование физических процессов» изучаются основы современных методов анализа, синтеза, оптимизации и прогнозирования, применяемых при решении задач электроэнергетики.

Весь материал курса подразделяется на четыре раздела, охватываемые соответствующими задачами, входящих в курсовую работу, которая выполняется в течение семестра. Курсовая работа должна быть сдана и зачтена до начала экзаменационно-зачетной сессии. Выполнение расчетов курсовой работы возможно с помощью математических пакетов (MathCAD, MathLAB, ANSYS).

Предусматриваются следующие формы усвоения материала по курсу:

а) самостоятельная работа студента с литературой в соответствии с изложенной ниже программой и методическими указаниями;

б) прослушивание лекций по основным принципиальным вопросам (в период установочной сессии);
в) практические занятия (в период установочной сессии);
г) выполнение курсовой работы.

Примеры тем лекций

1. Применение алгебры матриц при анализе установившихся режимов системы электроснабжения.
2. Формализованные методы анализа электрических цепей.
3. Некоторые методы решения систем алгебраических уравнений в задачах электроэнергетики.
4. Основные методы решения дифференциальных уравнений в задачах электроэнергетики.
5. Применение теории вероятностей, математической статистики в электроснабжении.

Пример перечня практических занятий

1. Расчет установившихся режимов в электроэнергетических системах.
2. Применение численных методов для решения алгебраических и дифференциальных уравнений.

Перечень рекомендованной литературы

1. Электрические системы: В 3 т. Т. 1.Математические задачи электроэнергетики /Под ред. В.А.Веникова.- М.:Высш.шк.,1981. - 288 с.
2. Перхач В.С. Математические задачи электроэнергетики. - Львов: Вища шк., 1982.-380 с.
3. Электрические системы. Электрические расчеты, программирование и оптимизация режимов /Под ред. В.А.Веникова. - М: Высш.шк., 1973. - 240 с.
4. Расчеты и анализ режимов работы сетей /Под ред. В.А.Веникова. - М: Энергия,1974.-274.
5. Демидович В.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М: Наука,1966.-664 с.
6. Максимович Н.Г. Линейные электрические цепи и их преобразования. - М: Госэнергоиздат,1961.-196 с.
7. Мельников Н.А. Матричный метод анализа электрических цепей. - М: Энергия,1972.-173 с.
8. Пухов Г.Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. - Киев: Наук. думка, 1967.-216 с.
9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.-М.: Физматгиз, 1969.-576 с.
10. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.-М.: Высш.шк.,1972.-368 с.

1.ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Основные вопросы. Геометрическая схема электрической цепи.

Аналитическая запись геометрической схемы с помощью матрицы соединений *П*. Аналитическая запись системы неизвестных контуров схемы с помощью матрицы контуров *Г*. Аналитическая запись параметров цепей, вынужденных сил и координат режима с помощью матриц сопротивлений ветвей *Z*, матриц проводимотей веток *Y*, многомерных векторов ЕРС ветвей – $\vec{E}$, источников тока $\vec{I}_k$, напряжений ветвей $\vec{U}$, токов ветвей $\vec{I}$, мощностей $\vec{S}$.

Основные законы електричних цепей в матрично-векторной форме.

Метод законов Кирхгофа.

Метод независимых токов. Система независимых токов. Матрица превращения независимых токов - $Б_1$. Матрица превращения источников тока - K_1. Уравнения метода независимых токов.

Метод контурних токов.

Метод независимых напряжений. Система независимых напряжений. Матрица преобразования независимых напряжений - $Б_2$. Матрица превращения источников ЭДС – K_2. Уравнения метода независимых напряжений. Метод узловых напряжений.

Матрицы собственных и взаимных проводимостей, коефициентов распределения, матрица условних узловых сопротивлений. Структура матриц, содержание их элементов.

Преобразование уравнений с комплексной плоскости в действительную плоскость

Для усвоения основ обобщенных методов анализа электроэнергетических систем необходимо рассчитать токи и напряжения ветвей цепи одним из методов (см. задачу 1):

а) методом независимых токов;

б) методом контурних токов;

в) методом независимых напряжений;

г) методом узловых напряжений.

Пример: рассчитать токи и напряжения ветвей цепи, изображенных на рис 1.1, при данных физических величинах

.

<u>Метод независимых токов.</u> Уравнения метода независимых токов в матрично-векторной форме записывается в следующем виде:

$$Z_1\vec{I}_1 = \vec{E}_{кк} + \vec{E}_к, \qquad (1.1)$$

де Z_1 – квадратичная матрица сопротивлений $n = p-(q-1)$ порядка (p – количество веток цепи; q – число вузлов цепи);

$\vec{I}_I$ – n –мерный вектор независимыхх токов;

$\vec{E}_{кк}$ – n–мерный вектор контурних ЭДС цепи;

$\vec{E}_к$ – n–мерный вектор контурних ЭДС цепи, еквивалентых источникам тока узлов цепи.

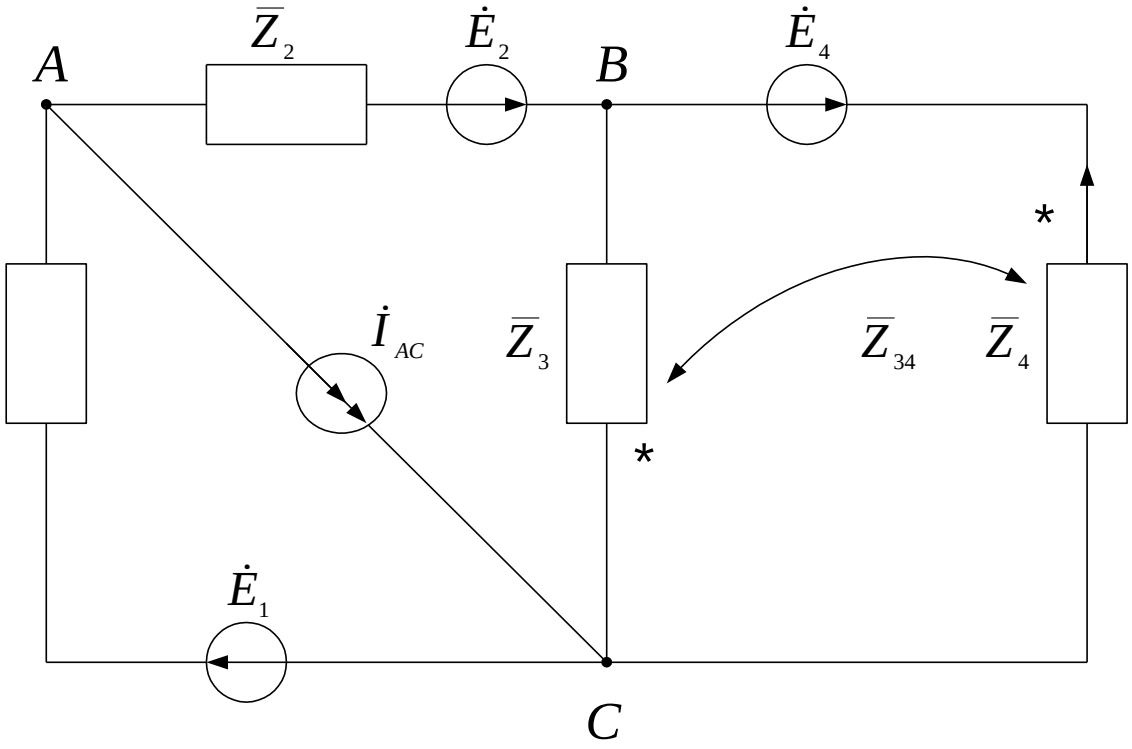


Рисунок 1.1

$$\dot{E}_1 = -110e^{j30^\circ} B, \qquad \overline{Z}_1 = 60e^{j30^\circ} Ом,$$

$$\dot{E}_2 = 220e^{-j60^\circ} B, \qquad \overline{Z}_2 = 60e^{j45^\circ} Ом,$$

$$\dot{E}_4 = 127e^{j45^\circ} B, \qquad \overline{Z}_3 = 40e^{j60^\circ} Ом,$$

$$\dot{I}_{AC} = 10e^{-j90^\circ} A, \qquad \overline{Z}_4 = 20e^{j45^\circ} Ом,$$

$$\overline{Z}_{34} = \overline{Z}_{43} = j20Ом.$$

Из уравнения (1.1) определяется вектор независимых токов.

$$\vec{I}_1 = Z_1^{-1}(\vec{E}_{кк} + \vec{E}_к), \tag{1.2}$$

а потом из зависимости

$$\vec{I} = Б_1\vec{I}_I - \begin{vmatrix} 0 \\ П_2^{-1} \end{vmatrix} \vec{I}_K \tag{1.3}$$

Находится вектор токов вервей цепи.

Решение задачи начинается с составления для круга уравнения метода (1.1).

1. Строим геометрическую схему цепи; один из узлов принимаем за базисный.

2. Определяем число независимых токов $n = p-(q-1)$ и составляем вектор этих токов $\vec{I}_I$. Независимые токи не должны заполнять один независимый узел.Записываем вектор токов веток цепи $\vec{I}_I = (\vec{I}_I ; \vec{I}_{II})$. Сначала идут токи, составляющих вектор $\vec{I}_I$, а дальше – другие токи, соединенные в вектор $\vec{I}_{II}$.

3. Записываем матрицу соединений цепи *П*, матрицю контуров *Г*, транспонированную матрицу контуров $Г_t$, матрицу сопротивлений ветвей цепи *Z*, вектор ЭДС ветвей $\vec{E}$ и вектор источников токов $\bar{I}_к$.

Последовательность ветвей в матрицах и векторах должна соответствовать последовательности токов в векторе $\vec{I}$ (см. п. 3).

4. В соответствии с распределением вектора $\vec{I}$ на вектор $\vec{I}_I$ і $\vec{I}_{II}$ делим матрицу *П* на две подматрицы-блока $П_1$ и $П_2$:

$$П = \left| П_1 П_2 \right|$$

5. Находим обратную матрицу $П_2^{-1}$.

6. Находим сумму матриц $-П_2^{-1}П_1$.

7. Записываем матрицу превращений независимых токов $Б_1$. Верхний блок матрицы $Б_1$ является единичная матрица порядка $n = p-(q-1)$.

$$Б_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -П_2^{-1}П_1 \end{vmatrix}.$$

9. Находим произведение матриц $\Gamma_t Z$.

10. Находим квадратную матрицу сопротивлений уравнения независимых токов Z_1 порядка – *n*:

$$Z_1 = \Gamma_t Z Б_1.$$

11. Находим вектор контурных токов ЭДС $\vec{E}_{кк}$:

$$\vec{E}_{кк} = \Gamma_t \vec{E}.$$

12. Находим матрицу превращения источников тока K_1.

Верхняя составляющая, блок-матрицы K_1 является нулевая матрица с n строчками и (q-1) столбцами, другие элементи матрицы найдены в п. 6 и 9.

$$K_1 = \Gamma_t Z \begin{vmatrix} 0 \\ П_2^{-1} \end{vmatrix}.$$

13. Определяем вектор эквивалентных контурных ЭДС $\vec{E}_к$:

$$\vec{E}_к = K_1 \vec{I}_к.$$

Уравнеения метода получено.

14. Находим обратную матрицу Z_1^{-1}.

15. Определяем вектор независимых токов $\vec{I}_1$ по уравнению (1.2).

16. Находим вектор токов ветвей цепи $\vec{I}$ по уравнению (1.3).

17. Определяем по законам Ома напряжения ветвей $\vec{U} = \vec{E} - Z\vec{I}$. Проиллюструем применение метода на примере (рис. 1.1). Геометрическая схема цепи показна на рис. 1.2.

За базисный примем узел В. Независимых токов n=2. Систему независимых токов не когут создавать токи $\dot{I}_1$ і $\dot{I}_2$, потому что они заполняют узел А. Независимым может быть, например, система токов $\vec{I}_1 = (\dot{I}_1, \dot{I}_3)$. Тогда $\vec{I}_{II} = (\dot{I}_2, \dot{I}_4)$. Поэтому $\vec{I} = (\dot{I}_1, \dot{I}_3, \dot{I}_2, \dot{I}_4)$.

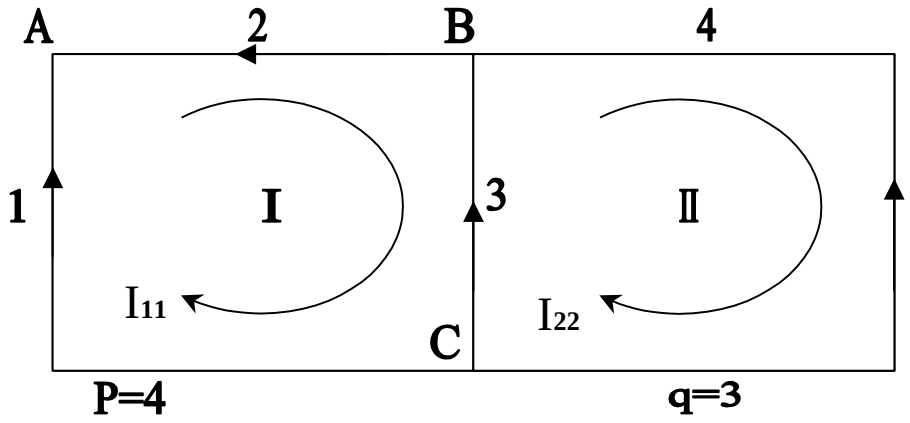


Рисунок 1.2

Матрицы для цепи:

$$\Pi = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} A \\ C \end{array}, \qquad \Gamma = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{I} \quad \mathbf{II} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{array}$$

$$\Gamma_t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_3 & 0 & -z_{34} \\ 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & -z_{43} & 0 & z_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{matrix},$$

$$\vec{E} = (\dot{E}_1, 0, -\dot{E}_2, -\dot{E}_4)^t,$$

$$\vec{I}_к = (-\dot{I}_{AC}, \dot{I}_{AC})^t.$$

Разделим матрицу $П$ на подматрицы-блоки $П_1$ і $П_2$:

$$П = [П_1 П_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Находим $П_2^{-1}$. Для этого: транспонируем матрицу $П_{2t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (поскольку $П_2$ – диагонально-симметрична, то $П_{2t} = П_2$);

Вычисляем определитель матрицы:

$$det\, П_{2t} = 1(-1) - 0 \cdot 0 = -1.$$

Находим присоединенную матрицу $\tilde{П}_{2t}$, то есть матрицу, сложеную из алгебраических дополнений $П_{2t}$:

$$\tilde{П}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу токов:

$$П_2^{-1} = \frac{1}{det\, П_{2t}} \tilde{П}_2 , \qquad П_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тепер вычислим:

$$-П_2^{-1} П_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица превращения независимых токов:

$$Б_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица $Б_1$ показывает, что токи вервей цепи, вызваны действием ЭДС, выражаются через независимые токи. Правельность определения $Б_1$ легко проверить, равняясь зависимости, что вытикает из уравнения (1.3) при $\vec{I}_k = 0$, с зависимостями, которые можно получить непосредственно с геометрической схемы цепи $\dot{I}_1 = \dot{I}_1$; $\dot{I}_3 = \dot{I}_3$; $\dot{I}_2 = -\dot{I}_1$; $\dot{I}_4 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_3$.

Дальше находим:

$$Г_t Z = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_3 & 0 & -z_{34} \\ 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & -z_{43} & 0 & z_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} z_1 & -z_3 & -z_2 & z_{34} \\ 0 & z_3 + z_{43} & 0 & -z_{43} - z_4 \end{bmatrix}.$$

Матрица сопротивлений независимых токов:

$$Z_1 = Г_t Z Б_1 = \begin{bmatrix} z_1 & -z_3 & -z_2 & z_{34} \\ 0 & z_3 + z_{43} & 0 & -z_{43} - z_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} z_1 + z_2 - z_{34} & -z_3 - z_{34} \\ z_{34} + z_4 & z_3 + z_{43} + z_{34} + z_4 \end{bmatrix}.$$

Вектор контурных ЭДС:

$$\vec{E}_{кк} = \Gamma_t \vec{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\dot{E}_1, 0, -\dot{E}_2, -\dot{E}_4\right)^t = \left(\dot{E}_1 + \dot{E}_2, \dot{E}_4\right)^t.$$

Матрица превращения источников тока:

$$K_1 = \begin{bmatrix} z_1 & -z_3 & -z_2 & z_{34} \\ 0 & z_3 + z_{43} & 0 & -z_{43} - z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_2 & -z_{34} \\ 0 & z_{34} + z_4 \end{bmatrix}.$$

Вектор эквивалентных контурных ЭДС:

$$E_к = \begin{bmatrix} -z_2 & -z_{34} \\ 0 & z_{34}+z_4 \end{bmatrix} \left(-\dot{I}_{AC}, \dot{I}_{AC}\right)^t = \left[\dot{I}_{AC} z_2 - \dot{I}_{AC} z_{34}; \dot{I}_{AC}(z_{34}+z_4)\right].$$

Все компоненти уравнения метода независимых токов в общем виде определены. Подставим заданые в условие значение физических величин цепи:

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 60e^{j30^0} + 60e^{j45^0} - 20e^{j90^0} & -40e^{j60^0} - 20e^{j90^0} \\ 20e^{j90^0} + 20e^{j43^0} & 40e^{j60^0} + 20e^{j90^0} + 20e^{j90^0} + 20e^{j43^0} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 107{,}9704e^{j29{,}05^0} & 58{,}1863e^{j249{,}9^0} \\ 36{,}9552e^{j67{,}5^0} & 95{,}1817e^{j68{,}95^0} \end{bmatrix} \text{Ом.}$$

Вектор контурных ЭДС:

$$\vec{E}_{кк} = (-110e^{j30^0} + 220e^{-j60^0}, 127e^{j45^0})^t \cdot (245{,}9673e^{-j86{,}6^0}, 127e^{j45^0})^t =$$

$$= (14{,}7372 - j245{,}5255; 89{,}8026 + j89{,}8026)^t \text{ В.}$$

Вектор эквивалентных контурных ЭДС:

$$\vec{E}_к = \left[10e^{-j90^0}(60e^{j45^0} - 20e^{j90^0});10e^{-j90^0}(20e^{j90^0} + 20e^{j45^0})\right]^t =$$

$$= (479{,}8898e^{-j62{,}15^0};369{,}5517e^{-j22{,}05^0})^t =$$

$$= (224{,}1846 - j424{,}3060;340{,}3001 - j144{,}0985)^t \text{ В}.$$

Результирующий вектор контурных ЭДС:

$$\vec{E}_{кк} + \vec{E}_к = (14{,}7372 - j245{,}5255;89{,}8026 + j89{,}8026)^t +$$
$$+ (224{,}1846 - j424{,}3060;340{,}3001 - j144{,}0985)^t =$$

$$= (238{,}9218 - j669{,}8315;430{,}1027 - j54{,}2959)^t = (711{,}1665e^{-j70{,}11^0};433{,}5162e^{-j7{,}75^0})^t.$$

Находим обратную матрицу сопротивлений уравнения метода независимых токов, т.е. Z_1^{-1}. Для этого транспонируем:

$$Z_{1t} = \begin{bmatrix} 107{,}9704e^{j29{,}05^0} & 36{,}9552e^{j67{,}5^0} \\ 58{,}1863e^{j249{,}9^0} & 95{,}1217e^{j68{,}95^0} \end{bmatrix}.$$

Вычисляем определитель Z_{1t} :

$$det\, Z_{1t} = 12013{,}68 e^{j104{,}5^0}.$$

Записываем соединенную матрицу:

$$Z_1^{\sim} = \begin{bmatrix} 95{,}1217 e^{j68{,}95^0} & -58{,}1863 e^{j249{,}9^0} \\ -36{,}9552 e^{j67{,}5^0} & 107{,}9704 e^{j29{,}05^0} \end{bmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу:

$$Z_1^{-1} = \frac{1}{det\, Z_{1t}} Z_1^{\sim} = \begin{bmatrix} 7{,}9204 \cdot 10^{-3} e^{-j35{,}55^0} & 4{,}8449 \cdot 10^{-3} e^{-j34{,}6^0} \\ 3{,}0771 \cdot 10^{-3} e^{j143^0} & 8{,}9903 \cdot 10^{-3} e^{-j75{,}45^0} \end{bmatrix}.$$

Вычисляем независимые токи:

$$\vec{I}_I = (\dot{I}_1, \dot{I}_3) = Z_1^{-1}(\vec{E}_{кк} + \vec{E}_к) = \begin{bmatrix} 7{,}9204 \cdot 10^{-3} e^{-j35{,}55^0} & 4{,}8449 \cdot 10^{-3} e^{-j34{,}6^0} \\ 3{,}0771 \cdot 10^{-3} e^{j143^0} & 8{,}9903 \cdot 10^{-3} e^{-j75{,}45^0} \end{bmatrix} \times$$

$$\times (711{,}1665 e^{-j70{,}11^0}; 433{,}5162 e^{-j7{,}75^0})^t =$$

$$= (6{,}8082e^{-j89{,}6^0};2{,}1327e^{-j56{,}6^0})^t = (0{,}0329 - j6{,}8081;1{,}1742 - j1{,}7803)^t.$$

Вычисяем токи всех ветвей цепи:

$$\vec{I} = (\vec{I}_I, \vec{I}_{II}) = (\dot{I}_1, \dot{I}_3, \dot{I}_2, \dot{I}_4)^t = Б_1\vec{I}_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ \Pi_2^{-1} \end{bmatrix}\vec{I}_к =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}(6{,}8032e^{-j89{,}6^0};2{,}1327e^{-j56{,}6^0}) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}(-10e^{-j90^0};10e^{-j90^0}) =$$

$$= (6{,}8032e^{-j89{,}6^0};2{,}1327e^{-j56{,}6^0};3{,}1921e^{j269{,}6^0};1{,}8573e^{j229{,}5^0}) =$$

$$= (0{,}0329 - j6{,}8081;1{,}1742 - j1{,}1742;-0{,}0329 - j3{,}1919;-1{,}2071 - j1{,}4115)\,\text{А}.$$

По закону Ома вычисляем напряжения ветвей цепи:

$$\vec{U}=(\dot{U}_1,\dot{U}_3,\dot{U}_2,\dot{U}_4)^t=\vec{E}-z\vec{I}=(\dot{E}_1,0,-\dot{E}_2,\dot{E}_4)^t-\begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_3 & 0 & -Z_{34} \\ 0 & 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & -Z_{43} & 0 & Z_4 \end{bmatrix}\times$$

$$\times(\dot{I}_1,\dot{I}_3,\dot{I}_2,\dot{I}_4)=(-110e^{j30^0};0;-220e^{-j60^0};-127e^{j45^0})-$$

$$\times(6{,}8082e^{-j69{,}6^0};2{,}1327e^{-j56{,}6^0};3{,}1921e^{j269{,}6^0};1{,}8573e^{j229{,}5^0})=$$

$$=(423{,}7840e^{j135{,}45^0};64{,}1819e^{j207{,}15^0};408{,}2163e^{j126{,}8^0};64{,}1819e^{j207{,}15^0})=$$

$$=(-301{,}9734+j297{,}3297;-57{,}1079-j29{,}2916;$$
$$-244{,}8655+j326{,}6213;-57{,}1079-j29{,}2916)B.$$

<u>Метод контурных токов</u> является частным случаем метода независимых токов. В матрично-векторной форме уравнения метода записываются в следующем виде:

$$Z_к\vec{I}_{кк}=\vec{E}_{кк}+E_к, \qquad (1.4)$$

де $\vec{I}_{кк}$– n–мерний вектор контурных токов;

$Z_к$ – квадратная *n*-порядка матрица контурных и взаимных сопротивлений.

Матриця

$$Z_к = Г_t Z Г, \tag{1.5}$$

может быть записан также непосредственно по схеме цепи для системы независимых контуров.

Правая часть уравнения (1.4) соответствует правой части уравнения метода независимых токов (1.1).

Контурные токи находятся из соотношения:

$$\vec{I}_{кк} = Z_к^{-1}(\vec{E}_{кк} + \vec{E}_к), \tag{1.6}$$

а токи ветвей цепи из выражения:

$$\vec{I} = Г\vec{I}_{кк} - \begin{vmatrix} 0 \\ П_2^{-1} \end{vmatrix} \vec{I}_к . \tag{1.7}$$

Последовательность применения метода контурных токов следующая:

1. Строим геометрическую схему цепи; один из узлов принимаем за базовый.
2. Определяем количество независимых контуров [*n*=*p*-(*q*-1)] и выбираем эти контура на схеме.
3. Запишемо вектор токов ветвей цепи $\vec{I}$. Компоненти вектора размищаем в такой последовательности: сначала *n* токов ветвей, что соответствуют (хотя б и с противоположным знаком) контурным токам; далее– другие (*q-1*) токов.

4. Запишем матрицу соединений цепи $П$, матрицу контуров $Г$, матрицу сопротивлений ветвей цепи Z, вектор ЭДС ветвей $\vec{E}$ и вектор источников токов $\vec{I}_к$. Последовность ветвей в матрицах и векторах должна соответствовать последовательности токов $\vec{I}$ (см. п. 3).

5. Другие (q-1) столбцов матрицы $П$ виделим в подматрицу-блок $П_2$.

6. Находим обратную матрицу $П_2^{-1}$.

В методе контурных токов матрица превращений $Б_1$ соответствует матрице $Г$.

Дальше, начиная с п.9, выполняем все дальнейшие действия метода независимых токов с той лишь разницей, что в п. 10 находим матрицу $Z_к = Г_t Z Г$ (или записываем её непосредственно по схеме электрической цепи); в п. 14 находим $Z_к^{-1}$, в п. 15 – $\vec{I}_{кк}$ по выражению (1.6), и в п. 16 для определения $\vec{I}$ используем зависимость (1.7).

Геометрическая схема цепи изображена на рис. 1.2; за базисный принимаем узел В. Там же показаны независимые контуры (n=2).

В векторе первыми ставим токи $\vec{I}_1$ і $\vec{I}_4$ ($\dot{I}_1 = \dot{I}_{11}$, $\dot{I}_4 = -\dot{I}_{22}$), дальше – токи $\dot{I}_2$ і $\dot{I}_3$. Тогда $\vec{I} = (\dot{I}_1, \dot{I}_4, \dot{I}_2, \dot{I}_3)$.

Матрицы и вектора цепи:

$$П = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ C \end{array},$$

$$Г = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{array}, \qquad Г_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$
Z = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_4 & 0 & -Z_{43} \\ 0 & 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & -Z_{34} & 0 & Z_3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{array},
$$

$$
\vec{E} = \left(\dot{E}_1, \dot{E}_4, \dot{E}_2, 0\right)^t, \qquad \vec{I}_к = (-\dot{I}_{AC}, \dot{I}_{AC})^t.
$$

Выделим матрицу $П_2$:

$$
П_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.
$$

Обратная матрица для этой диагональной матрицы:

$$
П_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.
$$

Произведение матриц:

$$\Gamma_t Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_4 & 0 & -Z_{43} \\ 0 & 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & -Z_{34} & 0 & Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{34} & -Z_2 & -Z_3 \\ 0 & -Z_4 - Z_{34} & 0 & Z_{43} + Z_3 \end{bmatrix}.$$

Матрица контурных сопротивлений:

$$Z_к = \Gamma_к Z \Gamma = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{34} & -Z_2 & -Z_3 \\ 0 & -Z_4 - Z_{34} & 0 & Z_{43} + Z_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 & -Z_{34} - Z_3 \\ -Z_{43} - Z_3 & Z_4 + Z_{34} + Z_{43} + Z_3 \end{bmatrix}..$$

Матрица $Z_к$ может быть записана также и непосредственно из схемы электрической цепи: диагональные элементы – собственные сопротивления контуров; другие элементы – взаимные сопротивления соответственных контуров.

Двумерный вектор контурных ЭДС:

$$\vec{E}_{кк} = \Gamma_t \vec{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\dot{E}_1, -\dot{E}_4; -\dot{E}_2; 0)^t = = (\dot{E}_1 + \dot{E}_2; \dot{E}_4)^t.$$

Матрица преобразования источников тока:

$$K_1 = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{34} & -Z_2 & -Z_3 \\ 0 & -Z_4 - Z_{34} & 0 & Z_{43} + Z_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_2 & Z_3 \\ 0 & -Z_3 - Z_{43} \end{bmatrix}.$$

Вектор эквивалентных контурных ЭДС:

$$\vec{E}_к = K_1 \vec{I}_к = \begin{bmatrix} -Z_2 & Z_3 \\ 0 & -Z_3 - Z_{43} \end{bmatrix} (-\dot{I}_{AC}, \dot{I}_{AC})^t =$$

$$= \left[\dot{I}_{AC}(Z_2 + Z_3); -\dot{I}_{AC}(Z_3 + Z_{43})\right]^t.$$

Все компоненты уравнения метода контурных токов в общем виде получены. Подставим заданные в условии значения физических величин цепи.

$$Z_к = \begin{vmatrix} 60e^{j30^0} + 60e^{j45^0} + 40e^{j60^0} & -40e^{j60^0} - 20e^{j90^0} \\ -40e^{j60^0} - 20e^{j90^0} & 40e^{j60^0} + 20e^{j45^0} + 20e^{j90^0} + 20e^{j90^0} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 114{,}3879+j107{,}0674 & -20-j54{,}6410 \\ -20-j54{,}6410 & 34{,}1421+j88{,}7831 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 156{,}6781e^{j43{,}1^0} & 58{,}1862e^{j249{,}9^0} \\ 58{,}1862e^{j249{,}9^0} & 95{,}1216e^{j68{,}9^0} \end{vmatrix}.$$

Вектор контурных ЭДС:

$$E_{кк}=\left(\dot{E}_1+\dot{E}_2;\dot{E}_4\right)=(-110e^{j30^0}+220e^{j60^0};127e^{j45^0})=$$

$$=(245{,}9673e^{-j86{,}6^0};127e^{j45^0})=$$

$$=(14{,}7372-j245{,}5255;89{,}8026+j89{,}8026)\text{В}.$$

$$\vec{E}_{кк}+\vec{E}_к=(14{,}7372-j245{,}5255;89{,}8026+j89{,}8026)+(770{,}7643-j624{,}1525;$$

$$-546{,}4237+j199{,}9626)=(785{,}5015-j869{,}6780;-456{,}5211+j289{,}7652)=$$

$$=(1171{,}9010e^{-j47{,}9^0};540{,}8019e^{j147{,}6^0}).$$

Вычислим обратную матрицу контурных сопротивлений $Z_к^{-1}$ (см. определение Z_1^{-1} в методе независимых токов). $Z_{кt}=Z_к$ (матрица диагонально-симметричная).

$$det\, Z_{кt} = -2997{,}324 + j11633{,}77 = 12013{,}68e^{j104{,}5^0},$$

$$Z_к^{\sim} = \begin{bmatrix} 95{,}1216e^{j68{,}9^0} & 58{,}1862e^{j69{,}9^0} \\ 58{,}1862e^{j69{,}9^0} & 156{,}6786e^{j43{,}1^0} \end{bmatrix},$$

$$Z_к^{-1} = \begin{bmatrix} 7{,}9178 \cdot 10^{-3} e^{-j35{,}6^0} & 4{,}8433 \cdot 10^{-3} e^{-j34{,}6^0} \\ 4{,}8433 \cdot 10^{-3} e^{-j34{,}6^0} & 13{,}0424 \cdot 10^{-3} e^{-j61{,}4^0} \end{bmatrix}.$$

Вычислим контурные токи :

$$\vec{I}_{кк} = (\dot{I}_{11}, \dot{I}_{22})^t = \begin{bmatrix} 7{,}9178 \cdot 10^{-3} e^{-j35{,}6^0} & 4{,}8433 \cdot 10^{-3} e^{-j34{,}6^0} \\ 4{,}8433 \cdot 10^{-3} e^{-j34{,}6^0} & 13{,}0424 \cdot 10^{-3} e^{-j61{,}4^0} \end{bmatrix} \times$$

$$\times (1171{,}901e^{-j47{,}9^0}; 540{,}8019e^{j147{,}6^0}) = (6{,}8082e^{-j89{,}6^0}; 1{,}8573e^{j49{,}5^0}) =$$

$$= (0{,}0329 - j6{,}8081; 1{,}2071 + j1{,}4115)A.$$

Получаем токи ветвей цепи:

$$\vec{I} = (\dot{I}_1, \dot{I}_4, \dot{I}_3, \dot{I}_2)^t = \Gamma \vec{I}_{кк} - \begin{bmatrix} 0 \\ \Pi_2^{-1} \end{bmatrix} \vec{I}_к = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times (6{,}8082e^{-j89{,}6^0}; 1{,}8573e^{j49{,}5^0}) -$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times (-10e^{-j90^0}; 10e^{-j90^0}) = (6{,}8082e^{-j80{,}6^0}; 1{,}8573e^{j229{,}5^0}; ; 3{,}1921e^{j269{,}6^0}; 2{,}1327e^{-j56{,}6^0}) =$$

$$= (0{,}0329 - j6{,}8081; -1{,}2071 - j1{,}4115; -0{,}0329 - j3{,}1919; 1{,}1742 - j1{,}7803)A.$$

Используя закон Ома, вычисляем напряжения ветвей цепи:

$$\vec{U} = (\dot{U}_1, \dot{U}_4, \dot{U}_2, \dot{U}_3)^t = (\dot{E}_1, -\dot{E}_4, -\dot{E}_2, 0)^t - \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_4 & 0 & -Z_{43} \\ 0 & 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & -Z_{34} & 0 & Z_3 \end{bmatrix} \times$$

$$\times (\dot{I}_1, \dot{I}_4, \dot{I}_2, \dot{I}_3)^t = (-110e^{j30^0}; -127e^{j45^0}; -220e^{-j60^0}; 0) -$$

$$-\begin{bmatrix} 60e^{j30^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20e^{j45^0} & 0 & -20e^{j90^0} \\ 0 & 0 & 60e^{j45^0} & 0 \\ 0 & -20e^{j90^0} & 0 & 40e^{j60^0} \end{bmatrix} \times$$

$$\times (6{,}8082e^{-j89{,}6^0}; 1{,}8573e^{j229{,}6^0}; 3{,}1921e^{j259{,}6^0}; 2{,}1327e^{-j56{,}6^0}) = (423{,}7840e^{j135{,}45^0};$$

$$64{,}1819e^{j207{,}15^0}; 408{,}2163e^{j126{,}8^0}; 64{,}1819e^{j207{,}15^0}) = (-301{,}9734 + j297{,}3297; -57{,}1079 -$$

$$-j29{,}2916;-244{,}8655+j326{,}6213;-57{,}1079-j29{,}2916)B.$$

<u>Метод независимых напряжений.</u> Уравнение метода независимых напряжений в матрично-векторной форме записывается в следующем виде:

$$Y_1\vec{U}_I=\vec{I}_к+\vec{I}_{кз}\ , \qquad (1.8)$$

где Y_1 – квадратная матрица проводимостей $(q-1)$ порядка;

$\vec{U}$ – $(q-1)$-мерний вектор независимых напряжений ветвей цепи;

$\vec{I}_к$ – $(q-1)$-мерний вектор источников тока узлов цепи;

$\vec{I}_{кз}$ – $(q-1)$-мерний вектор источников тока, эквивалентных источникам ЭДС ветвей цепи.

Из уравнения (1.8) можно найти вектор независимых напряжений $\vec{U}_1$:

$$\vec{U}_I=Y_1^{-1}(\vec{I}_к+\vec{I}_{кз}), \qquad (1.9)$$

а потом из зависимости

$$\vec{U}=Б_2\vec{U}_I \qquad (1.10)$$

определяется *p*– мерний вектор напряжений ветвей цепи .

Вычисления начинают со сложения для цепи уравнения метода (1.8).

1.Строим геометрическую схему цепи, выбираем базисный узел.

2. Определяем число независимых напряжений – (q-1) и составим вектор независимых напряжений $\vec{U}_I$. Ветви, напряжения которые входят в $\vec{U}_I$, не должны создавать замкнутый контур.

3. Записываем вектор напряжений ветвей цепи $\vec{U} = (\vec{U}_I, \vec{U}_{II})$. Сначала записывают напряжения, которые образуют вектор $\vec{U}_I$, дальше – другие напряжения, которые образуют вектор $\vec{U}_{II}$.

4. Записываем матрицу соединений цепи $П$, матрицу контуров $Г$, транспонированную матрицу контуров $Г_t$, матрицу сопротивлений ветвей цепи Z, вектор ЭДС ветвей $\vec{E}$ и вектор источников тока $\vec{I}_к$.

5. В соответствии с распределением вектора $\vec{U}$ на вектора $\vec{U}_I$, $\vec{U}_{II}$ делим матрицу $Г_t$ на две подматрицы-блока $Г_{t_1}$ и $Г_{t_2}$.

6. Находим матрицу, обратную к $Г_{t_2}$, то есть $Г_{t_2}^{-1}$.

7. Находим произведение матриц $Г_{t_2}^{-1} Г_{t_1}$.

8. Записываем матрицу преобразования независимых напряжений $Б_2$. Верхняя подматрица блок-матрицы $Б_2$ это единичная матрица порядка (q-1).

$$Б_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -Г_{t2}^{-1} Г_{t1} \end{bmatrix}.$$

9. Вычисляем матрицу проводимостей ветвей цепи Y как обратную к матрице сопротивлений ветвей:

$$Y = Z^{-1}.$$

10. Получаем матрицу преобразования источников ЭДС ветвей:

$$K_2 = ПY.$$

11. Вычисляем матрицу проводимостей уравнения независимых напряжений:

$$Y_1 = ПYБ_2 = K_2 Б_2.$$

12. Находим вектор эквивалентного источника тока:

$$\vec{I}_{кз} = K_2 \vec{E}.$$

Все компоненты уравнения (1.8) найдены.

13. Находим обратную матрицу проводимостей Y^{-1}.

14. По уравнению (1.9) определяем вектор независимых напряжений $\vec{U}_I$.

15. Из уравнения (1.10) определяем вектор напряжения ветвей $\vec{U}$.

16. По закону Ома вычисляем токи ветвей цепи:

$$\vec{I} = Y(\vec{E} - \vec{U}).$$

Геометрическая схема цепи показана на рис. 1.2; за базисный принемаем узел В. Системы независимых напряжений не могут создать, например, напряжения $\dot{U}_3$ и $\dot{U}_4$, потому, что ветви 3 и 4 образуют замкнутый контур. Независимой может быть, например, система напряжений $\vec{U}_I = (\dot{U}_1, \dot{U}_3)$. Тогда $\vec{U}_{II} = (\dot{U}_2, \dot{U}_4)$ и, таким образом, $\vec{U}_I = (\vec{U}_I, \vec{U}_{II}) = (\dot{U}_1, \dot{U}_3, \dot{U}_2, \dot{U}_4)$.

Матрицы и вектора цепи:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \\ \Pi = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A \\ C \end{array} \end{array};$$

$$\Gamma = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{array} \end{array}; \qquad \Gamma_t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \\ Z = & \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_3 & 0 & -Z_{43} \\ 0 & 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & -Z_{34} & 0 & Z_4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{array} \end{array},$$

$$\vec{E} = \left(\dot{E}_1, 0, -\dot{E}_2, -\dot{E}_4\right)^t, \qquad \vec{I}_K = (-\dot{I}_{AC}, \dot{I}_{AC})^t.$$

Делим матрицу Γ_t на подматрицы-блоки:

$$\Gamma_t = \left[\Gamma_{t_1} \Gamma_{t_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Обратная к диагональной матрице Γ_{t_2}:

$$\Gamma_{t_2}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Произведение матриц:

$$-\Gamma_{t_2}^{-1}\Gamma_{t_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица преобразования независимых напряжений:

$$Б_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица $Б_2$ показывает, как напряжения ветвей цепи определяются через независимые напряжения. Верность определения $Б_2$ легко проверить, приравняв зависимости, которые следуют из выважения (1.10) с зависимостями, которые можно получить непосредственно из электрической схемы.

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_1; \;\; \dot{U}_3 = \dot{U}_3; \;\; \dot{U}_2 = \dot{U}_1 - \dot{U}_3; \;\; \dot{U}_4 = \dot{U}_3.$$

Матрицу проводимостей ветвей цепи, как обратную матрицу сопротивдений Z, можно найти, используя прием распеределения выходящей матрицы на подматрицы-блоки. Для облегчения вычислений бывает достаточно сделать перестановку строк и столбцов матрицы Z, чтобы подматрицы-блоки были нулевыми или диагональными матрицами максимально высокого порядка. В нашем случае достаточно поменять местами вторую и третью строки, и второй и третий столбцы. После перестановки получим:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & -Z_{34} \\ 0 & 0 & -Z_{43} & Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}.$$

Матрица будет обратной к Z, если выполняется условие ZY=1, то есть:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, определение матрицы Y сводится к определению подматриц-блоков $Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}$.

Для этого развернем блоковое уравнение, то есть:

$$Z_{11}Y_{11} + Z_{12}Y_{21} = 1; \qquad Z_{21}Y_{11} + Z_{22}Y_{21} = 0;$$

$$Z_{11}Y_{12} + Z_{12}Y_{22} = 0; \qquad Z_{21}Y_{12} + Z_{22}Y_{22} = 1.$$

Отсюда находим (начиная с вычисления Z_{22}^{-1}):

$$Y_{11} = (Z_{11} - Z_{12}Z_{22}^{-1}Z_{21})^{-1}; Y_{21} = Z_{22}^{-1}Z_{21}Y_{11},$$

$$Y_{12} = -Y_{11}Z_{12}Z_{22}^{-1}; Y_{22} = Z_{22}^{-1} - Z_{22}^{-1}Z_{21}Y_{12} \tag{1.11}$$

Подматрицы-блоки Z_{12} й Z_{21} в нашем случае нулевые, формулы (1.11) при этих условиях примут вид:

$$Y_{11} = Z_{11}^{-1}; \quad Y_{21} = 0,$$

$$Y_{12} = 0; \qquad Y_{22} = Z_{22}^{-1}.$$

Вычислим

$$Z_{11}^{-1} = Y_{11} \text{ і } Z_{22}^{-1} = Y_{22},$$

$$Z_{11} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_2 \end{bmatrix} \text{ – диагональная матрица,}$$

$$Y_{11} = Z_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\bar{Z}_1 & 0 \\ 0 & 1/\bar{Z}_2 \end{bmatrix},$$

$$z_{22} = \begin{bmatrix} \bar{z}_3 & -\bar{z}_{34} \\ -\bar{z}_{43} & \bar{z}_4 \end{bmatrix}, \qquad z_{22t} = \begin{bmatrix} \bar{z}_3 & -\bar{z}_{43} \\ -\bar{z}_{34} & \bar{z}_4 \end{bmatrix},$$

$$det\, z_{22t} = \bar{z}_3\bar{z}_4 - \bar{z}_{34}\bar{z}_{43} = \bar{\Delta},$$

$$Y_{22} = \bar{z}_{22}^{-1} = \frac{1}{\bar{\Delta}}\,\tilde{\bar{z}}_{22}\begin{bmatrix} \bar{z}_4/\bar{\Delta} & \bar{z}_{34}/\bar{\Delta} \\ \bar{z}_{43}/\bar{\Delta} & \bar{z}_3/\bar{\Delta} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\bar{z}}_{22} = \begin{bmatrix} \bar{z}_4 & \bar{z}_{34} \\ \bar{z}_{43} & \bar{z}_3 \end{bmatrix}.$$

Вычислив подматрицы-блоки, запишем:

$$Y = \begin{bmatrix} 1/\bar{z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\bar{z}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z}_4/\bar{\Delta} & \bar{z}_{34}/\bar{\Delta} \\ 0 & 0 & \bar{z}_{43}/\bar{\Delta} & \bar{z}_3/\bar{\Delta} \end{bmatrix}.$$

Теперь необходимо восстановить прошлый порядок строк и столбцов:

$$Y = \begin{bmatrix} 1/\bar{z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{z}_4/\overline{\Delta} & 0 & \bar{z}_{34}/\overline{\Delta} \\ 0 & 0 & 1/\bar{z}_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_{43}/\overline{\Delta} & 0 & \bar{z}_3/\overline{\Delta} \end{bmatrix}.$$

Находим матрицу преобразования вектора ЭДС ветвей в вектор эквивалентных источников тока:

$$K_2 = \Pi Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1/\bar{z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{z}_4/\overline{\Delta} & 0 & \bar{z}_{34}/\overline{\Delta} \\ 0 & 0 & 1/\bar{z}_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_{43}/\overline{\Delta} & 0 & \bar{z}_3/\overline{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\bar{z}_1 & 0 & 1/\bar{z}_2 & 0 \\ -1/\bar{z}_1 & -\dfrac{\bar{z}_{43}+\bar{z}_4}{\overline{\Delta}} & 0 & \dfrac{\bar{z}_3+\bar{z}_{34}}{\overline{\Delta}} \end{bmatrix}.$$

Находим матрицу проводимостей независимых напряжений:

$$Y_1 = ПУБ_2 = K_2 Б_2 = \begin{bmatrix} 1/\bar{z}_1 & 0 & 1/\bar{z}_2 & 0 \\ -1/\bar{z}_1 & -\dfrac{\bar{z}_{43}+\bar{z}_4}{\bar{\Delta}} & 0 & \dfrac{\bar{z}_3+\bar{z}_{43}}{\bar{\Delta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\bar{z}_1 + 1/\bar{z}_2 & -1/z_2 \\ -1/\bar{z}_1 & -\dfrac{\bar{z}_3+\bar{z}_4+\bar{z}_{34}+\bar{z}_{43}}{\bar{\Delta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{z}_2+\bar{z}_1}{\bar{z}_2\bar{z}_1} & -\dfrac{1}{\bar{z}_2} \\ -\dfrac{1}{\bar{z}_2} & -\dfrac{\bar{z}_3+\bar{z}_4+\bar{z}_{34}+\bar{z}_{43}}{\bar{z}_3\bar{z}_4-\bar{z}_{34}\bar{z}_{43}} \end{bmatrix}.$$

Определяем вектор эквивалентных источников токов:

$$\vec{I}_{кз} = K_2\vec{E} = \begin{bmatrix} 1/\bar{z}_1 & 0 & 1/\bar{z}_2 & 0 \\ -1/\bar{z}_1 & -\dfrac{\bar{z}_{43}+\bar{z}_4}{\bar{\Delta}} & 0 & \dfrac{\bar{z}_3+\bar{z}_{43}}{\bar{\Delta}} \end{bmatrix} \times \left(\dot{E}_1,\ \ 0,\ \ -\dot{E}_2,\ \ -\dot{E}_4\right)^t =$$

$$= \left(\dot{E}_1\frac{1}{\bar{z}_1} - \dot{E}_2\frac{1}{\bar{z}_2};\ \ -\dot{E}_1\frac{1}{\bar{z}_1} + \dot{E}_4\frac{\bar{z}_3+\bar{z}_{34}}{\bar{\Delta}}\right)^t.$$

Все компоненты уравнения метода независимых напряжений в общем виде найдены. Поставим заданные в условии значения физических величин цепи. Матрица проводимостей ветвей:

$$Y=\begin{bmatrix} \frac{1}{60e^{j30^0}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{20e^{j45^0}}{\overline{\Delta}} & 0 & \frac{20e^{j90^0}}{\overline{\Delta}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{60e^{j45^0}} & 0 \\ 0 & \frac{20e^{j90^0}}{\overline{\Delta}} & 0 & \frac{40e^{j60^0}}{\overline{\Delta}} \end{bmatrix} \text{Ом}^{-1},$$

$$\overline{\Delta}=40e^{j60^0}\,20e^{j45^0}-20e^{j90^0}\,20e^{j90^0}.$$

$$Y=\begin{bmatrix} 1{,}6667\cdot10^{-2}e^{-j30^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}5111\cdot10^{-2}e^{-j31^0} & 0 & 2{,}5111\cdot10^{-2}e^{j14^0} \\ 0 & 0 & 1{,}6667\cdot10^{-2}e^{-j45^0} & 0 \\ 0 & 2{,}5111\cdot10^{-2}e^{j14^0} & 0 & 5{,}0222\cdot10^{-2}e^{-j16^0} \end{bmatrix} \text{Ом}^{-1}.$$

Матрица проводимостей уравнения независимых напряжений:

$$Y_1=\begin{bmatrix} \frac{60e^{j45^0}+60e^{j30^0}}{60e^{j45^0}\,60e^{j30^0}} & -\frac{1}{60e^{j45^0}} \\ \frac{1}{60e^{j30^0}} & -\frac{40e^{j60^0}+20e^{j45^0}+20e^{j90^0}+20e^{j90^0}}{40e^{j60^0}\,20e^{j45^0}+20e^{j90^0}\,20e^{j90^0}} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 3{,}3048\cdot 10^{-2}e^{-j37{,}5^0} & 1{,}6667\cdot 10^{-2}e^{j135^0} \\ 1{,}6667\cdot 10^{-2}e^{j150^0} & 1{,}1943\cdot 10^{-1}e^{j172{,}95^0} \end{bmatrix}\text{Ом}^{-1}.$$

Вектор эквивалентных источников тока:

$$\vec{I}_{K3}=\left(-110e^{j30^0}\frac{1}{60e^{j30^0}}-220e^{-j60^0}\frac{1}{60e^{j45^0}};\quad 110e^{j30^0}+127e^{j45^0}\frac{40e^{j60^0}+20e^{j90^0}}{40e^{j60^0}20e^{j45^0}-20e^{j90^0}20e^{j90^0}}\right)=$$

$$=\left(3{,}6505e^{j104^0};\quad 10{,}7666e^{j32{,}75^0}\right)=\left(-0{,}8843+j3{,}5417;\quad 9{,}0539+j5{,}8263\right)\text{ А}.$$

Результирующий вектор источников тока:

$$\vec{I}_K+\vec{I}_{K3}=(j10;-j10)^t+(-0{,}8843+j3{,}5417;9{,}0539+j5{,}863)^t=$$

$$=(-0{,}8843+j13{,}5417;9{,}0539-j4{,}1737)^t=\left(13{,}5706e^{j93{,}6^0};9{,}9696e^{-j24{,}75^0}\right)^t\text{ А}.$$

Вычислим обратную матрицу проводимостей независимых наряжений (последовательность вычисления такая же, как при вычислении Z_1^{-1} в методе независимых токов):

$$Y_{1t} = \begin{bmatrix} 3{,}3048 \cdot 10^{-2} e^{-j37{,}5^0} & 1{,}6667 \cdot 10^{-2} e^{j150^0} \\ 1{,}6667 \cdot 10^{-2} e^{j135^0} & 1{,}1943 \cdot 10^{-1} e^{j172{,}95^0} \end{bmatrix},$$

$$det\, Y_{1t} = -2{,}8846 \cdot 10^{-3} + j3{,}0372 \cdot 10^{-3} = 4{,}1887 \cdot 10^{-3} e^{j183{,}55^0},$$

$$Y_1^{\sim} = \begin{bmatrix} 1{,}1943 \cdot 10^{-1} e^{-j172{,}95^0} & 1{,}6667 \cdot 10^{-2} e^{j45^0} \\ 1{,}6667 \cdot 10^{-2} e^{-j30^0} & 3{,}3048 \cdot 10^{-2} e^{-j37{,}5^0} \end{bmatrix},$$

$$Y_1^{-1} = \frac{1}{det\, Y_{1t}} Y_1^{\sim} = \begin{bmatrix} 28{,}5119 e^{j39{,}4^0} & 3{,}9789 e^{-j178{,}55^0} \\ 3{,}9789 e^{-j163{,}55^0} & 7{,}8897 e^{-j171{,}05^0} \end{bmatrix} \text{Ом}.$$

Вычислим двомерный вектор независимых напряжений:

$$\vec{U}_I = (\dot{U}_1, \dot{U}_3)^t = Y_1^{-1}(\vec{I}_K + \vec{I}_{K3})^t = \begin{bmatrix} 28{,}5119 e^{j39{,}4^0} & 3{,}9789 e^{-j178{,}55^0} \\ 3{,}9789 e^{-j163{,}55^0} & 7{,}8897 e^{-j171{,}05^0} \end{bmatrix} (13{,}5706 e^{j93{,}8^0}; 9{,}9696 e^{-j24{,}75^0}) =$$

$$= \left(423{,}7840 e^{j135{,}45^0}; 64{,}1819 e^{j207{,}15^0}\right) - \left(-301{,}9734 + j297{,}3297; -57{,}1079 - j29{,}2916\right) \text{В}.$$

Находим напряжения всех ветвей цепи:

$$\vec{U} = (\dot{U}_1, \dot{U}_3, \dot{U}_2, \dot{U}_4)^t = Б_2 \vec{U}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(-301{,}9734 + j297{,}3297; -57{,}1079 - j29{,}2916\right) =$$

$$= \left(-301{,}9734 + j297{,}3297; -57{,}1079 - j29{,}2916; -244{,}8655 + j326{,}6213; -57{,}1079 - j29{,}2916\right) =$$

$$= (423{,}7840 e^{-j135{,}45^0}; 64{,}1819 e^{j207{,}15^0}; 408{,}2163 e^{-j126{,}8^0}; 64{,}1819 e^{j207{,}15^0}) \text{В}.$$

Для вычисления по закону Ома токов ветвей:

$$\vec{I} = Y(\vec{E} - \vec{U}).$$

Найдем сначала вектор падения напряжений на ветвях $(\vec{E} - \vec{U})$:

$$\vec{E} - \vec{U} = (-95{,}2628 - j55; 0; -110 + j190{,}5255; -89{,}8026 - j89{,}8026) -$$

$$-\left(-301{,}9734 + j297{,}3297; -57{,}1079 - j29{,}2916; -244{,}8655 + j326{,}6213; -57{,}1079 - j29{,}2916\right) =$$

$$= (206{,}7106 - j352{,}3297; 57{,}1079 + j29{,}2916; 134{,}8655 - j136{,}0957; -32{,}6947 - j60{,}5109) =$$

$$=(408{,}4917e^{-j59{,}6^0};64{,}1819e^{j27{,}15^0};191{,}6004e^{-j45{,}4^0};68{,}7787e^{j241{,}6^0})\text{В}.$$

Вычислим вектор токов ветвей цепи :

$$\vec{I}=(\dot{I}_1,\dot{I}_3,\dot{I}_2,\dot{I}_4)=Y(\vec{E}-\vec{U})=$$

$$=\begin{bmatrix} 1{,}6667\cdot 10^{-2}e^{-j30^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}5111\cdot 10^{-2}e^{-j31^0} & 0 & 2{,}5111\cdot 10^{-2}e^{j14^0} \\ 0 & 0 & 1{,}6667\cdot 10^{-2}e^{-j45^0} & 0 \\ 0 & 2{,}5111\cdot 10^{-2}e^{j14^0} & 0 & 5{,}0222\cdot 10^{-2}e^{-j16^0} \end{bmatrix}\times$$

$$\times(408{,}4917e^{-j59{,}6^0};64{,}1819e^{j27{,}15^0};191{,}6004e^{-j45{,}4^0};68{,}7787e^{j241{,}6^0})=$$

$$=(6{,}8082e^{-j89{,}6^0};2{,}1327e^{-j36{,}6^0};3{,}1921e^{j269{,}6^0};1{,}8573e^{j229{,}5^0})=$$

$$=(0{,}0329-j6{,}8081;1{,}1742-j1{,}7803;-0{,}0329-j3{,}1919;-1{,}2071-j1{,}4115)\text{А}.$$

<u>Метод узловых напряжений</u> это частный случай метода независимых напряжений. В матрично-векторной форме уравнение метода записывается в виде:

$$Y_B\vec{U}_B=\vec{I}_к+\vec{I}_{кз}, \qquad (1.12)$$

где $\vec{U}_B - (q-1)$-мерний вектор узловых напряжений;

Y_B - квадратная симетричная $(q-1)$ порядка матрица проводимостей уравнения метода узловых напряжений.

$$Y_B = ПУП_t.$$

Матрица Y_B для цепей без взаимноиндуктивных связей может быть записана непосредственно на основе схемы цепи.

Правая часть уравнения (1.12) соответствует правой части уравнения метода независимых напряжений (1.8).

Узловые напряжения находим по соотношению:

$$\vec{U}_B = Y_B^{-1}(\vec{I}_к + \vec{I}_{кз}), \tag{1.13}$$

а дальше по виражению:

$$\vec{U} = П_t\vec{U}_I \tag{1.14}$$

находим *p*-мерний вектор напряфжений ветвей цепи.

Последовательность выполнения метода узловых напряжений в основном совпадает с последовательностью выполнения метода независимых напряжений.

1. Строим геометрическую схему цепи, вибираем базисный узел.
2. Складываем (*q*-1) – мерний вектор узловых напряжений $\vec{U}_B$.
3. Складываем вектора токов ветвей $\vec{I}$ и напряжений ветвей $\vec{U}$, матрицу соединений цепи *П*, транспонированную матрицу соединения $П_t$, матрицу сопротивлений ветвей *Z*, вектор ЭДС ветвей $\vec{E}$, вектор источников тока $\vec{I}_к$.

Последовательность ветвей может быть произвольной, но во всех матрицах и векторах однаковой. Последовательность независимых узлов в векторе $\vec{I}_к$ и матрицы $П$ должна соответствовать их последовательности в векторе $\vec{U}_B$.

Матрица преобразования узловых напряжений соответствует матрице $П_t$. Дальше, начиная с п.9, выполняются все следующие пункты последовательности выполнения метода независимых напряжений с той же разницей, что в п. 13 находим Y_B^{-1}, в п.14 по уравнению (1.13) вычислим $\vec{U}_B$, а в п. 15 вектор $\vec{U}$ вычислим по выражению (1.14).

Геометрическая схема цепи изображена на рис. 1.2; за базисный узел принимаем узел В. В схеме (q-1)=3-1=2 независимых узла, поэтому вектор $\vec{U}_B$ имеет два компонента, которые соответствуют узлам А и С.

$$\vec{U}_B = (\dot{U}_A, \dot{U}_C).$$

Многомерные вектора и матрицы цепи: принимаем натуральную последовательность ветвей в векторах и матрицах.

$$\vec{I} = (\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4)^t; \qquad \vec{U} = (\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3, \dot{U}_4)^t;$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ П = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A \\ C \end{array} \end{array};$$

$$П_t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad z = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{z}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z}_3 & -\bar{z}_{34} \\ 0 & 0 & -\bar{z}_{43} & \bar{z}_4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$$\vec{E} = (\dot{E}_1, -\dot{E}_2, 0, -\dot{E}_4)^t; \qquad \vec{I}_K = (-\dot{I}_{AC}; \dot{I}_{AC})^t.$$

1 2 3 4

Матрица проводимостей ветвей цепи $Y = Z^{-1}$ для принятой здесь последовательности ветвей в Z найдена уже в теме «Метод независимых напряжений». Там же приведена последовательность вычисления Y в общем виде:

$$Y = \begin{bmatrix} 1/\bar{z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\bar{z}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z}_4/\bar{\Delta} & \bar{z}_{34}/\bar{\Delta} \\ 0 & 0 & \bar{z}_{43}/\bar{\Delta} & \bar{z}_3/\bar{\Delta} \end{bmatrix}.$$

де $\bar{\Delta} = \bar{z}_3\bar{z}_4 - \bar{z}_{34}\bar{z}_{43}$.

Матрица преобразования источников ЭДС ветвей:

$$K_2 = ПY = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \times\times \begin{bmatrix} 1/\bar{z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\bar{z}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z}_4/\bar{\Delta} & \bar{z}_{34}/\bar{\Delta} \\ 0 & 0 & \bar{z}_{43}/\bar{\Delta} & \bar{z}_3/\bar{\Delta} \end{bmatrix}. = \begin{bmatrix} 1/\bar{z}_1 & 1/\bar{z}_2 & 0 & 0 \\ -1/\bar{z}_1 & 0 & -\dfrac{\bar{z}_4 + \bar{z}_{43}}{\bar{\Delta}} & -\dfrac{\bar{z}_{34} + \bar{z}_3}{\bar{\Delta}} \end{bmatrix}.$$

Матрица проводимостей уравнения узловых напряжений :

$$Y_B = ПYП_t = \begin{bmatrix} 1/\bar{z}_1 & 1/\bar{z}_2 & 0 & 0 \\ -1/\bar{z}_1 & 0 & -\dfrac{\bar{z}_4 + \bar{z}_{43}}{\bar{\Delta}} & -\dfrac{\bar{z}_{34} + \bar{z}_3}{\bar{\Delta}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} 1/\bar{z}_1+1/\bar{z}_2 & -1/\bar{z}_1 \\ -1/\bar{z}_1 & 1/\bar{z}_1+\dfrac{\bar{z}_4+\bar{z}_{43}+\bar{z}_{34}+\bar{z}_3}{\bar{\Delta}} \end{bmatrix}.$$

Вычислим вектор эквивалентных источников тока:

$$\vec{I}_{K3}=K_2\vec{E}=\begin{bmatrix} 1/\bar{z}_1 & 1/\bar{z}_2 & 0 & 0 \\ -1/\bar{z}_1 & 0 & -\dfrac{\bar{z}_4+\bar{z}_{43}}{\bar{\Delta}} & -\dfrac{\bar{z}_{34}+\bar{z}_3}{\bar{\Delta}} \end{bmatrix}\times(\dot{E}_1,-\dot{E}_2,0,-\dot{E}_4)^t=$$

$$=\left(\dot{E}_1\frac{1}{\bar{z}_1}-\dot{E}_2\frac{1}{\bar{z}_2};-\dot{E}_1\frac{1}{\bar{z}_1}+\dot{E}_4\frac{\bar{z}_{34}+\bar{z}_3}{\bar{\Delta}}\right).$$

Все компоненты уравнения метода узловых напряжений в общем виде найдены. Подставим заданные в условии значения физических величин цепи.

Матрица проводимостей ветвей:

$$Y=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{60e^{j30^0}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{60e^{j45^0}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{20e^{j45^0}}{\bar{\Delta}} & \dfrac{20e^{j90^0}}{\bar{\Delta}} \\ 0 & 0 & \dfrac{20e^{j90^0}}{\bar{\Delta}} & \dfrac{40e^{j60^0}}{\bar{\Delta}} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\Delta} = 40e^{j60^0}\,20e^{j45^0} - 20e^{j90^0}\,20e^{j90^0},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1{,}6667\cdot 10^{-2}e^{-j30^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}6667\cdot 10^{-2}e^{-j45^0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}5111\cdot 10^{-2}e^{-j31^0} & 2{,}5111\cdot 10^{-2}e^{j14^0} \\ 0 & 0 & 2{,}5111\cdot 10^{-2}e^{j14^0} & 5{,}0222\cdot 10^{-2}e^{-j16^0} \end{bmatrix} \text{Ом}^{-1}.$$

Матрица проводимостей уравнения узловых напряжений:

$$Y_B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{60e^{j30^0}} + \dfrac{1}{60e^{j45^0}} & -\dfrac{1}{60e^{j30^0}} \\ -\dfrac{1}{60e^{j30^0}} & \dfrac{1}{60e^{j30^0}} + \dfrac{40e^{j60^0} + 20e^{j45^0} + 20e^{j90^0} + 20e^{j90^0}}{40e^{j60^0}\,20e^{j45^0} - 20e^{j90^0}\,20e^{j90^0}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3{,}3048\cdot 10^{-2}e^{-j37{,}5^0} & 1{,}6667\cdot 10^{-2}e^{j150^0} \\ 1{,}6667\cdot 10^{-2}e^{j150^0} & 1{,}3493\cdot 10^{-1}e^{-j9{,}8^0} \end{bmatrix} \text{Ом}^{-1}.$$

Вектор эквивалентных источников тока совпадает с соответствующим вектором уравнения метода независимых напряжений:

$$\vec{I}_{K3} = \left(3{,}6505e^{j104^0};10{,}7666e^{j32{,}75^0}\right) = \left(-0{,}8843 + j3{,}5417;9{,}0539 + j5{,}8263\right) \text{ А}.$$

Совпадает также и результирующий вектор источников тока:

$$\vec{I}_{K3} + \vec{I}_K = (-0{,}8843 + j13{,}5417; 9{,}0539 - j4{,}1737) = = \left(13{,}5706 e^{j93{,}8^0}; 9{,}9696 e^{-j24{,}75^0}\right) \text{ А.}$$

Вычислим обратную матрицу проводимостей уравнения узловых напряжений (последовательность вычисления такая же, как и при вычислении Z_1^{-1} в методе независимых токов):

$$Y_{Bt} = Y_B \quad \text{(матрица диагонально-симметричная),}$$

$$det\, Y_{Bt} = 2{,}8846 \cdot 10^{-3} - j3{,}0372 \cdot 10^{-3} = 4{,}1887 \cdot 10^{-3} e^{-j46{,}45^0},$$

$$Y_B^{\sim} = \begin{bmatrix} 1{,}3493 \cdot 10^{-1} e^{-j9{,}8^0} & 1{,}6667 \cdot 10^{-2} e^{-j30^0} \\ 1{,}6667 \cdot 10^{-2} e^{-j30^0} & 3{,}3048 \cdot 10^{-2} e^{-j37{,}5^0} \end{bmatrix},$$

$$Y_B^{-1} = \begin{bmatrix} 32{,}2132 e^{j36{,}65^0} & 3{,}9789 e^{j16{,}45^0} \\ 3{,}9789 e^{j16{,}45^0} & 7{,}8897 e^{j171{,}05^0} \end{bmatrix} \text{ Ом.}$$

Вычислим двухмерный вектор узловых напряжений:

$$\vec{U}_B = (\dot{U}_A, \dot{U}_C) = Y_B^{-1}\left(\vec{I}_K + \vec{I}_{K3}\right) = \begin{bmatrix} 32{,}2132 e^{j36{,}65^0} & 3{,}9789 e^{j16{,}45^0} \\ 3{,}9789 e^{j16{,}45^0} & 7{,}8897 e^{j171{,}05^0} \end{bmatrix} \times$$

$$\times\left(13{,}5706e^{j93{,}8^0};9{,}9696e^{-j24{,}75^0}\right)=$$

$$=\left(408{,}2163e^{126{,}8^0};64{,}1819e^{27{,}15^0}\right)=\left(-244{,}8655+j326{,}6213;57{,}109+j29{,}2916\right)\text{ В.}$$

Вычислим вектор напряжений ветвей цепи:

$$\vec{U}=(\dot{U}_1,\dot{U}_2,\dot{U}_3,\dot{U}_4)^t=\Pi_t\vec{U}_B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\left(-244{,}8655+j326{,}6213;57{,}109+j29{,}2916\right)=$$

$$=\left(-301{,}9734+j297{,}3297;-244{,}8655+j326{,}6213;-57{,}1079-j29{,}2916;-57{,}1079-j29{,}2916\right)=$$

$$=\left(423{,}7840e^{j135{,}45^0};408{,}2163e^{j126{,}8^0};64{,}1819e^{j207{,}15^0};64{,}1819e^{j207{,}15^0}\right)\text{ В.}$$

Для вычисления по закону Ома токов ветвей цепи:

$$\vec{I}=Y(\vec{E}-\vec{U}).$$

Найдем сначала вектор падения напряжений в ветвях $(\vec{E}-\vec{U})$:

$$\vec{E}-\vec{U}=(-95{,}2628-j55;-110+j190{,}5255;0;89{,}8026-j89{,}8026)-$$

$$-(-301{,}9734+j297{,}3297;-244{,}8655+j326{,}6213;-57{,}1079-j29{,}2916;-57{,}1079-j29{,}2916)=$$

$$= (206{,}7106 - j352{,}3297; 134{,}8655 - j136{,}0957; 57{,}1079 + j29{,}2916; -32{,}6947 - j60{,}5109) =$$

$$= \left(408{,}4917 e^{-j59{,}6^0}; 191{,}6004 e^{-j45{,}4^0}; 64{,}1819 e^{j27{,}15^0}; 68{,}7787 e^{j241{,}6^0} \right) \text{ В.}$$

Вычислим вектор токов ветвей цепи:

$$\vec{I} = (\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4)^t =$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}6667 \cdot 10^{-2} e^{-j30^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}6667 \cdot 10^{-2} e^{-j45^0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}5111 \cdot 10^{-2} e^{-j31^0} & 2{,}5111 \cdot 10^{-2} e^{j14^0} \\ 0 & 0 & 2{,}5111 \cdot 10^{-2} e^{j14^0} & 5{,}0222 \cdot 10^{-2} e^{-j16^0} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left(408{,}4917 e^{-j59{,}6^0}; 191{,}6004 e^{-j45{,}4^0}; 64{,}1819 e^{j27{,}15^0}; 68{,}7787 e^{j241{,}6^0} \right) =$$

$$= \left(6{,}8082 e^{-j89{,}6^0}; 3{,}1921 e^{j269{,}9^0}; 2{,}1327 e^{-j56{,}6^0}; 1{,}8573 e^{j229{,}5^0} \right) =$$

$$= \left(0{,}0329 - j6{,}8081; -0{,}0329 - j3{,}1919; 1{,}1742 - j1{,}7803; -1{,}2071 - j1{,}4115 \right) \text{ А.}$$

2. ЧИСЛЕНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНЕЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основные вопросы. Общие принципы численных методов. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений с одной переменной. Извлечение корня. Интервал изоляции корня. Метод половинного деления. Метод простой итерации. Метод Ньютона (метод касательных) для случая действительных и комплексных корней. Итерационный метод последовательных исключений.

Решение систем линейных уравнений. Итерационные методы: метод простой итерации, метод итерации Зейделя, метод градиента (скорейшего спуска), метод Ньютона. Методы минимизации: метод минимизации суммы квадратов невязок, метод минимизации суммы модулей невязок, метод наименьших квадратов.

Вопросы сходимости численных методов решения конечных уравнений.

Область применения численных методов решения.
Аналитическая аппроксимация функции. Определение коэффициентов аппроксимированных функций.

Для ознакомления и усвоения численных методов решения конечных уравнений предлагается задача анализа нелинейной цепи постоянного тока (см. задание 2).

Пример. Нелинейная цепь постоянного тока приведена на рис.2.1.
Цепь имеет два нелинейных элемента, которые имеют одинаковые вольт-амперные характеристики(рис.2.2.). Физические величины цепи имеют такие значения:
E_1=215 В, E_2=220 В, I_{AB}= 8 А, I_{CD}= 4 А,
R_3= 15 Ом, R_4= 20 Ом, R_5= 25 Ом,

Необходимо произвести расчет установившегося режима цепи.
Уравнения состояния цепи записать на основе метода контурных токов.
Для записи уравнений состояния на основании метода контурных токов следует с начала распределить токи источников тока по ветвям схемы, эквивалентировать их источниками ЭДС ветвей. Для этого достаточно принять, что ток каждого источника тока замыкается по ветвям с линейными элементами таким образом, чтобы эти ветви вместе с источником тока образовывали замкнутый контур.

Падение напряжения на ветвях от тока источника отвечает эквивалентным электродвижущим силам в этих ветвях.

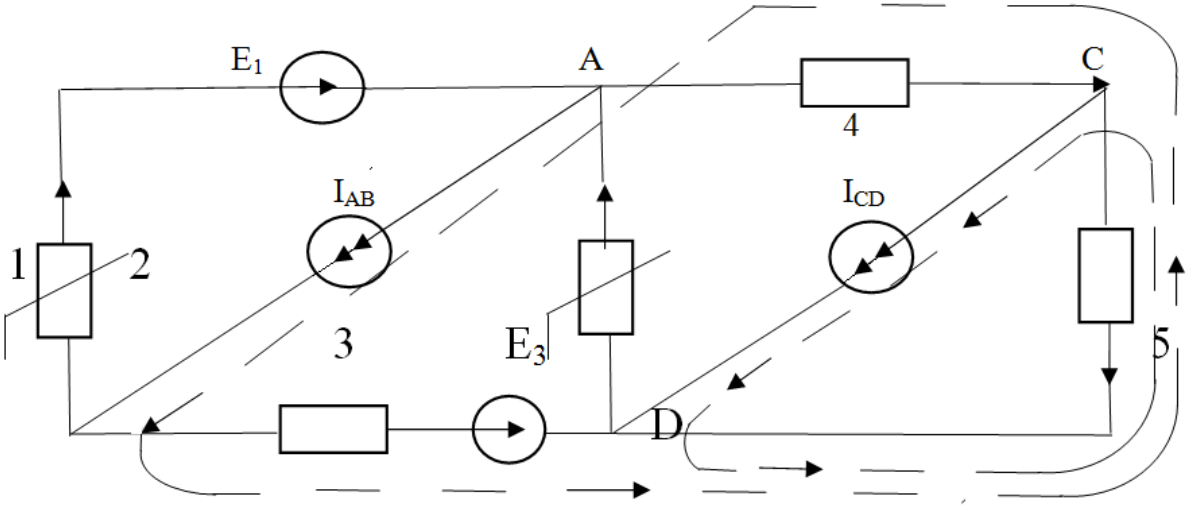
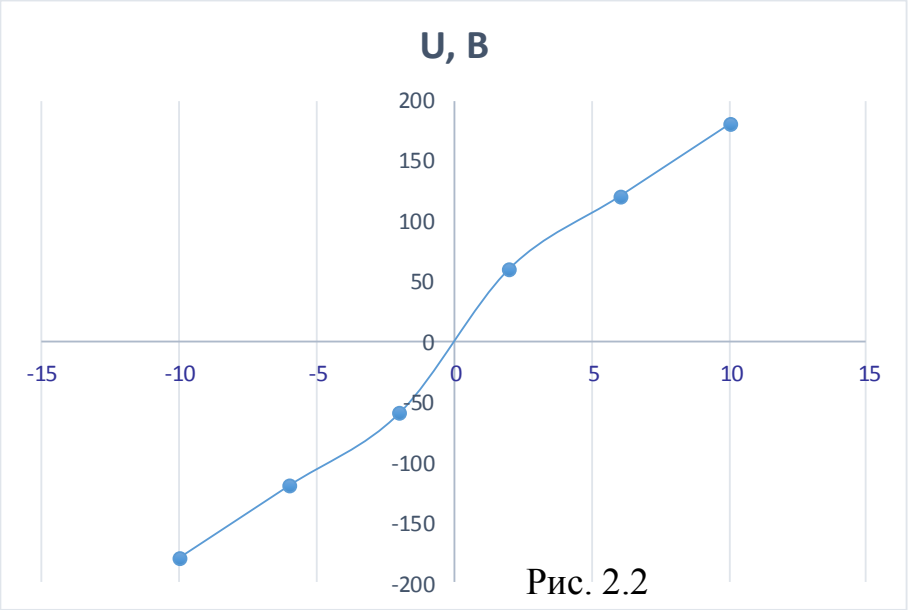


Рис. 2.1



I, A

Рис. 2.2

Так, в схеме рис. 2.1 можно принять, что ток источника I_{AB} замыкается через ветви 3,5 и 4, вызывая падение напряжений соответственно $I_{AB}r_3$, $I_{AB}r_5$, $I_{AB}r_4$. Ток J_{co} замыкается через ветвь 5, вызывая падение напряжения $I_{CD}r_5$. Преобразованная схема показана на рис. 2.3.

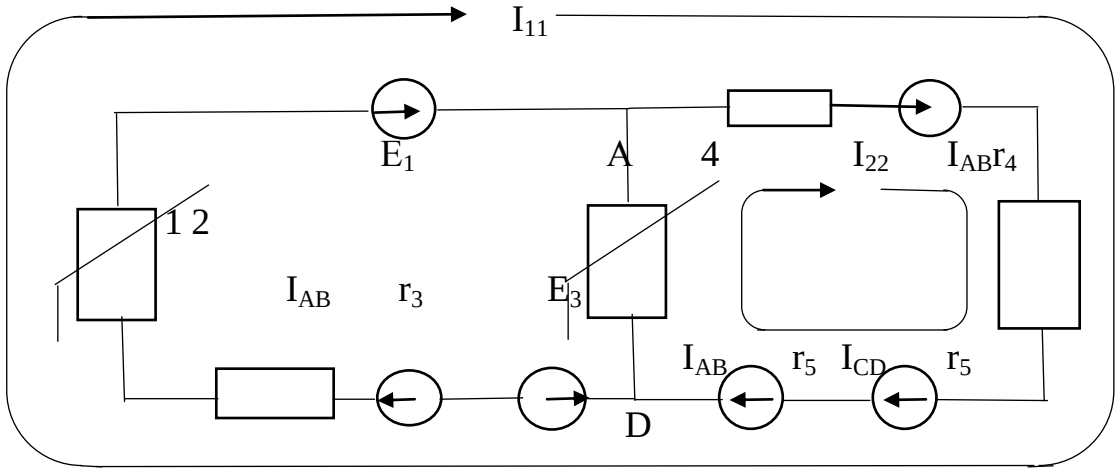


Рис. 2.3

На останове этой схемы в методе контурных токов составляются уравнения равновесия напряжений. После определения контурных токов для нахождения действительных токов ветвей следует кроме контурных учитывать предыдущее распределение по ветвям токов источников тока.

При составлении уравнений контуры следует выбирать так, чтобы через нелинейные элементы I,2 протекал только один контурный ток, так как принцип наложения может быть применен только к линейной части схемы.

Уравнения равновесия напряжений схемы для выбранных на рис. 2.3 контуров можно записать так:

$$\begin{bmatrix} r_3 + r_4 + r_5 & r_4 + r_5 \\ r_4 + r_5 & r_4 + r_5 \end{bmatrix} (\mathrm{I}_{11}, \mathrm{I}_{22}) + [V_1(\mathrm{I}_{11}); V_2(\mathrm{I}_{22})] + (-E_1 - I_{AB}r_4 - I_{AB}r_5 - I_{CD}r_5 - I_{AB}r_3 + E_3; -I_{AB}r_4 - I_{AB}r_5 - I_{CD}r5) = 0$$

При решении задачи можно непосредственно пользоваться ВАХ или аналитической аппрокмисацией этой характеристики.

Воспользуемся другим способом. Аппроксимирую кривую (рис. 2.2) полином

$$V(I)=aI+bI^3+cI^5.$$

Теперь уравнение (2.1) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{22} & r_{22} \end{bmatrix}(I_{11},I_{22}) + \left(aI_{11}+bI_{11}^3+cI_{11}^5, aI_{22}+bI_{22}^3+cI_{22}^5\right) + [-E_1]_{AB}(r_4+r_3+r_5) - I_{CD}r_5 + E_3; -I_{AB}(r_4+r_5) - I_{CD}r_5] = 0 \qquad (2.2)$$

Для определения коэффициентов a, b, c аппроксимирующего полинома возьмем на кривой (рис. 2.2) три характерные точки (по числу членов полинома); четвертая точка (I=0, V=0) удовлетворяется автоматически.

Для выбранной совокупности точек (I точка – 2А, 60В; II-5А, 110В; III-10А, 180В) записываем матрично-векторное уравнение

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 32 \\ 5 & 125 & 3125 \\ 10 & 10^3 & 10^5 \end{bmatrix}(a,b,c) = (60,115,180).$$

Из которого находим (a,b,c)=(31,61; -0,4139; 0,00278), т.е.

$$V(I)=31.61\ I \qquad -0.4139\ I^3 \qquad +0.00278\ I^5.$$

Подставим найденные параметры и значения физических величин цепи в уравнение (2.2)

$$\begin{bmatrix} 15+20+25 & 20+25 \\ 20+25 & 20+25 \end{bmatrix}(I_{11},I_{22}) + \left(31{,}61I_{11} - 0.4139I_{11}^3 + 0.00278\,I_{11}^5; 31.61I_{22} - 0.4139I_{22}^3 + 0.00278I_{22}^5\right) + [-215 - 8(20+15+25) - 4.25 + 220; -8(20+25) - 4.25)] = 0.$$

Производя элементарные преобразования, получим

$$\begin{bmatrix} 60 & 45 \\ 45 & 45 \end{bmatrix}(I_{11},I_{22}) + \left(31{,}61I_{11} - 0.4139\,I_{11}^3 + 0{,}00278I_{11}^5; 31{,}61I_{22} - 0{,}4139I_{22}^3 + 0{,}00278I_{22}^5\right) + (-575,-460) = 0$$

Найдем нулевые приближения двумерного вектора контурных токов $\vec{I}_{kk}^{(0)} = (I_{11}^{(0)}, I_{22}^{(0)})$. Для этого примем вольт-амперные характеристики элементов I- и 2-линейным, т.е. в аппроксимирующем полиноме возьмем лишь линейный член V(I)=aI, и уравнение состояния реши как линейное

$$\begin{bmatrix} 60 & 45 \\ 45 & 45 \end{bmatrix}\left(I_{11}^{(0)}, I_{22}^{(0)}\right) + \left(31{,}61 I_{11}^{(0)} 31{,}61 I_{22}^{(0)}\right) + (-575;\ -460) = 0.$$

Из уравнения находим $(I_{11}^{(0)}, I_{22}^{(0)})$=(4,676; 3,258)А.

Составление уравнений состояния и нулевого приближения вектора известных является общим подготовительным этапом для непосредственного применения численных методов решения конечных уравнений.

<u>Метод простой итерации.</u> Рабочая формула метода простой итерации для системы нелинейных уравнений записывается в следующем виде:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \breve{c}\vec{f}\left(\vec{x}^{(k)}\right),$$

где $\vec{x}^{(k)}$, $\vec{x}^{(k+1)}$ – соответственно к -е и (к +1) –е приближение многомерного вектора неизвестных;

$\vec{f}\left(\vec{x}^{(k)}\right) = \vec{\varepsilon}^{(k)}$ – многомерный вектор невязок к-го шага приближений, компоненты вектора невязок равны левым частям уравнений системы при подстановке к –го приближения вектора неизвестных;

$\breve{c}$ – квадратная матрица; $\breve{c} = -\left[\breve{W}\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right]^{-1}$,

Где $\breve{W}\left(\vec{x}^{(0)}\right)$ – матрица Якоби вектора-функции $\vec{f}(\vec{x})$ в точке не нулевого приближения.

Матрица Якоби определяется по следующему выражению:

$$\breve{W}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Т.е элементы строк матрицы Якоби представляют собой частные производные соответствующего уравнения системы последовательно по x_1, x_2, …, x_n. При таком выборе матрицы $\breve{c}$ процесс итерации сходится.

Для принятых в нашей задаче обозначений рабочая формула метода простой итерации записывается так

$$\vec{I}_{kk}^{(k+1)} = \vec{I}_{kk}^{(k)} + \breve{c}\vec{f}(\vec{I}_{kk}^{(k)})$$

Или в развернутом виде

$$(I_{11}^{(k+1)}, I_{22}^{(k+1)}) = \left(I_{11}^{(k)}, I_{22}^{(k)}\right) + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} (\mathcal{E}_1^{(k)}, \mathcal{E}_2^{(k)}). \quad (2.5)$$

Для нахождения матрицы $\breve{c}$ найдем вначале матрицу Якоби

$$\breve{W}(I_{kk}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\vec{I}_{kk})}{\partial I_{11}} & \dfrac{\partial f_1(\vec{I}_{kk})}{\partial I_{22}} \\ \dfrac{\partial f_2(\vec{I}_{kk})}{\partial I_{11}} & \dfrac{\partial f_2(\vec{I}_{kk})}{\partial I_{22}} \end{bmatrix}$$

Первое уравнение нашей системы (2.2, 2.3)

$$f_1(\vec{I}_{kk}) = r_{11}I_{11} + r_{12}I_{22} + aI_{11} + b_{11}^3 + cI_{11}^5 - 575, (2.6)$$

Второе

$$f_2(\vec{I}_{kk}) = r_{21}I_{11} + r_{22}I_{22} + aI_{22} + bI_{22}^3 + cI_{22}^5 - 460 \ (2.7)$$

Т.е.

$$\breve{W}(\vec{I}_{kk}) = \begin{bmatrix} r_{11} + a + 3bI_{11}^2 + 5cI_{11}^4 & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} + a + 3bI_{22}^2 + 5cI_{22}^4 \end{bmatrix} \ (2.8)$$

В точке нулевого приближения при $(I_{11}^{(0)}, I_{22}^{(0)}) = (4.67; 3.258)$А матрица Якоби запишется так:

$$\breve{W}\left(\vec{I}_{kk}^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 60 + 31{,}61 - 3 * 0.4139 * 4.676^2 + 5 * 0.00278 * 4.676^4 & 45 \\ 45 & 45 + 31{,}61 + 3 * 0.4139 * 3.258^2 + 5 * 0.00278 * 3.258^4 \end{bmatrix}$$

$$\breve{W}\left(\vec{I}_{kk}^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 71.106 & 45 \\ 45 & 64.996 \end{bmatrix}$$

Далее вычислим

$$= -\frac{1}{2596{,}57}\begin{bmatrix} 64{,}996 & -45 \\ -45 & 71{,}1055 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}5031 * 10^{-2} & 1{,}733 * 10^{-2} \\ 1{,}733 * 10^{-2} & -2{,}7384 * 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Для вычисления первого приближения контурных токов уже найдены все элементы уравнения (2.5), за исключением двумерного вектора невязок нулевого приближения, который найдем, подставив в первое (2.6) и второе (2.7) уравнения системы нулевое приближение токов.

$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(0)},\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(0)})=\vec{f}\left(I_{kk}^{(0)}\right) = [f_1\left(I_{kk}^{(0)}\right), f_2(I_{kk}^{(0)})]$=60*4.676+45*3.258+31.61*4.676-0.4139*4.676^3+0.00278*4.676^5-575;45*4.676+45*3.258+31.61*3.258-0.4139*3.258^3+0.00278*3.258^5-460)=(-36, 1245; - 13.2777),

Т.е первое приближение токов: $\vec{I}_{kk}^{(1)} = \left(I_{11}^{(1)}, I_{22}^{(1)}\right) = (4.676; 3.258) + \begin{bmatrix} -2.5031 * 10^{-2} & 1.733 * 10^{-2} \\ 1.733 * 10^{-2} & -2.7384 * 10^{-2} \end{bmatrix}$*(-4.1245; - 13.2777)=(4.676; 3.258)+(0.9042-0.2301;-0.6260+0.3636)=(4.676;3.258+0.6741;-0.2624)=(5.3501;3.9956), А

<u>Второй шаг приближения</u>

Вектор невязок первого приближения

$$\vec{\varepsilon}^{\,(2)} = (-0{,}0954; 0.0078).$$

Третье приближение вектора неизвестных (контурных токов)

$$I_{kk}^{(3)} = (5.378; 2.980) + \begin{bmatrix} -2.5031 * 10^{-2} & 1.733 * 10^{-2} \\ 1.733 * 10^{-2} & -2.7384 * 10^{-2} \end{bmatrix} * (-0.0954; 0.078) = (5.378; 2.950) + (0.0025; -0.0019)$$
$$= (5.380; 2.978)A$$

И так далее.

Метод интерации Зейделя. В отличии от метода простой итерации в методе Зейделя на (к+1)-м шаге приближения при вычислении «старших» неизвестных используется «младшие» неизвестные, найденные на этом же (к+1)-м шаге.

Алгоритм метода можно записать так:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + [c_{11}c_{12} \dots c_{1n}]\vec{f}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}),$$

$$x_1^{(k+1)} = x_2^{(k)} + [c_{21}c_{22} \dots c_{2n}]\vec{f}\left(x_1^{k+1}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right),$$

$$x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + [c_{n1}c_{n2} \dots c_{nn}]\vec{f}\left(x_1^{k+1}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right),$$

где C_{R3} – элемент матрицы $\check{C}$ на формулы простой итерации.

Для нашей задачи алгоритм запишется так:

$$I_{11}^{(k+1)} = I_{11}^{k} + [C_{11}C_{12}]\vec{f}\left(I_{11}^{(k)}, I_{22}^{(k)}\right) = I_{11}^{(k)} + [c_{11}c_{12}]\vec{\mathcal{E}}^{(k,k)}$$

$$I_{22}^{(k+1)} = I_{22}^{k} + [C_{21}C_{22}]\vec{f}\left(I_{11}^{(k+n)}, I_{22}^{(k)}\right) = I_{22}^{(k)} + [c_{21}c_{22}]\vec{\mathcal{E}}^{(k+1,k)}$$

Первое приближение.

Имея нулевое приближение токов $\left(I_{11}^{(0)}, I_{22}^{(0)}\right) = (4.676; 3.258)A$,

Матрицу $\check{C}$ и двумерный вектор навязок нулевого приближения $\vec{\mathcal{E}}^{(0)}$, который обозначим теперь $\vec{\mathcal{E}}^{(0,\ 0)} = \vec{f}(I_{11}^{(0)}, I_{22}^{(0)})$, найдем первое приближение тока I_{11}.

$$I_{11}^{(1)} = 4.676 + [-2.5031 \cdot 10^{-2}; 1.733 \cdot 10^{-2}] \cdot (-36.1245;\ -13.2777) = 4.676 + 0.942 - 0.230 = 4.674 + 0.674 = 5.335A.$$

Для нахождения первого приближения тока I_{22}

$$I_{22}^{(1)} = I_{22}^{(0)} + [c_{21}c_{22}]\ \vec{\mathcal{E}}^{(1,\ 0)}$$

Необходимо опередлить вектор невязок $\vec{\mathcal{E}}^{(1,0)}=\vec{f}(I_{11}^{(1)},I_{22}^{(0)})$.

Который получим при подстановке в выражениях (2.6) и (2.7) только что найденного приближения $I_{11}^{(1)}$ и нулевого приближения $I_{22}^{(0)}$

$$\vec{\mathcal{E}}^{(1,0)}=\vec{f}(I_{11}^{(1)},I_{22}^{(0)}=60\cdot 5.335+45\cdot 3.258+31.61\cdot 5.365-0.4139\cdot 5.335^3+0.00278\cdot 5.335^5-575;45\cdot 5.335+45\cdot 3.258+31.61\cdot 3.258-0.4139\cdot 3.258^3+0.00278^3-460)=(9.515;16.377).$$

Теперь

$$I_{22}^{(1)}=3.258+[1.733\cdot 10^{-2};-2.7384\cdot 10^{-2}]\cdot(9.515;16.377)=3.258+0.165-0.448=2.975A.$$

<u>Второе приближение.</u>

$$\vec{\mathcal{E}}^{(1,1)}=\vec{f}\left(I_{11}^{(1)},I_{22}^{(1)}\right)=(-3.2199;-2.26).$$

$$I_{11}^{(0)}=5.335+[-2.5031\cdot 10^{-2};1.733\cdot 10^{-2}]\cdot(-3.2199;-2.26)=5.335+0.0806-0.039=5.376\,A.$$

$$\vec{\mathcal{E}}^{(2,1)}=\vec{f}\left(I_{11}^{(2)},I_{22}^{(1)}\right)=(-0.455;-0.416)$$

$$I_{22}^{(2)}=2.975+[1.733\cdot 10^{-2};-2.7384\cdot 10^{-2}]\cdot(-0.455;-0.416)=2.975-0.0079+0.011=2.9785\,A$$

<u>Третье приближение.</u>

$$\vec{\mathcal{E}}^{(2,2)}\vec{f}\left(I_{11}^{(2)},I_{22}^{(3)}\right)=(-0.297;-0.1722).$$

$$I_{11}^{(3)}=5.376+[-2.5031\cdot 10^{-2};1.733\cdot 10^{-2}]\cdot(-0.297;-0.1722)=5.376+0.0074-0.00295=5.380\,A.$$

$$\vec{\mathcal{E}}^{(3,2)}=\vec{f}\left(I_{11}^{(3)},I_{22}^{(2)}\right)=(-0.028;-0.00217).$$

$$I_{22}^{(3)} = 3.9785 + [1.733 \cdot 10^{-2}; -2.7384 \cdot 10^{-2}] * (-0.028; -0.00217) = 2.979\ A$$

И так далее.

<u>Метод Градиента (скорейшего спуска).</u> Рабочую формулу метода скорейшего спуска можно записать так:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{k} - m^{(k)} \breve{W}_t(\vec{x}^{(k)}) \vec{\mathcal{E}}^{(k)}. \qquad (2.9)$$

Для вычисления (к+1)-го приближения вектора неизвестных следует выполнить такие операции:

а) вычислить многомерный вектор невязок

$\vec{\mathcal{E}}^{(k)} = \vec{f}\left(\vec{x}_{(k)}\right)$;

б) найти матрицу Якоби (2.4), (2.8) для k-го приближения и записать транспортированную матрицу Якоби $\breve{W}_t(\vec{x}^{(k)})$;

в) найти произведение транспортированной матрицы Якоби на вектор невязок $\breve{W}_t(\vec{x}^{(k)})\ \vec{\mathcal{E}}^{(k)}$;

г) вычислить вектор $\vec{\delta}^{(k)}$

$$\vec{\delta}^{(k)} = \breve{W}_t(\vec{x}^{(k)})\ \breve{W}_t(\vec{x}^{(k)})\ \vec{\mathcal{E}}^{(k)};$$

д) определить параметр итерации

$$m^{(k)} = \frac{\vec{\mathcal{E}}^{(k)} \vec{\delta}^{(k)}}{\vec{\delta}^{(k)} \vec{\delta}^{(k)}};$$

е) по формуле (2.9) вычислить следующие (k+1)-е приближение переменных $\vec{x}^{(k+1)}$.

Перепишем рабочую формулу метода применительно к нашей задаче

$$\vec{I}_{kk}^{(k+1)} = \vec{I}_{kk}^{(k)} - m^{k} \breve{W}_t(\vec{I}_{kk}^{(k)})\ \vec{\mathcal{E}}^{(k)}.$$

Из вычислений видно, что в методе простой итерации имеем

$$\vec{I}_{kk}^{(0)}, \breve{W}_t\left(\vec{I}_{kk}^{(k)}\right), \vec{\mathcal{E}}^{(0)}.$$

Первое приближение.

а) $\vec{\mathcal{E}}^{(0)}=\vec{f}(\vec{I}_{kk}^{(0)})$=(-36.1245; -13.1277);

б) $\breve{W}\left(\vec{I}_{kk}^{(0)}\right)=\begin{bmatrix}71{,}1055 & 45\\ 45 & 64{,}996\end{bmatrix}$

матрица диагонально-симметричная, поэтому $\breve{W}_t\left(\vec{I}_{kk}^{(0)}\right)=\breve{W}\left(\vec{I}_{kk}^{(0)}\right)$;

в)

$\breve{W}_t\left(\vec{I}_{kk}^{(0)}\right), \vec{\mathcal{E}}^{(0)}=\begin{bmatrix}71{,}1055 & 45\\ 45 & 64{,}996\end{bmatrix}\cdot(-36{,}1245;\ -13.2777)=(-2568.65-597.49-1625.6-863)=(-3166.1;-2488.59);$

г)

$\begin{bmatrix}71{,}1055 & 45\\ 45 & 64{,}996\end{bmatrix}(-3166{,}1;-2488.59)=(-225127.1-111986.55;-142474.5-161748.39)=$

$\vec{\delta}^{(0)}=(-337113.67;-304222.89);$

д) $m^{(0)}=\frac{(-36.1245;-13.2777)(-337113.67;-304222.89)}{(-337113.67;-304222.89)(-337113.67;-304222.89)}=\frac{-36.1245(-337113.67)+(-13.2777)(304222.89)}{(-337113.67)(337113.67)+(-304222.89)(-304222.89)}=\frac{217442}{2.06197\cdot10^{11}}$=7.865$\cdot 10^5$.

Произведение двух многомерных векторов равняется сумме произведений соответствующих компонентов каждого вектора

е) $\vec{I}_{kk}^{(1)}=(4.676;3.258)-7.865\cdot10^{-5}(3166.1;-2488.59)=4.676;3.258)-(-0.0249;-0.196)=(4.925;3.454)\,A.$

Второе приближение.

а) $\vec{\mathcal{E}}^{(1)}=\vec{f}\left(I_{kk}^{(1)}\right)=(-9.7796;10.547);$

б) $\breve{W}\left(I_{kk}^{(1)}\right)=\begin{bmatrix}69.667 & 45\\ 45 & 63.774\end{bmatrix};\ \breve{W}\left(I_{kk}^{(1)}\right)=\breve{W}\left(I_{kk}^{(1)}\right);$

в) $\breve{W}_t\left(I_{kk}^{(1)}\right)\vec{\mathcal{E}}^{(1)}=\begin{bmatrix}69.667 & 45\\ 45 & 63.774\end{bmatrix}\cdot(-9.7796;10.547)=(-206.7;232.54);$

г) $\vec{\delta}^{(1)} = \begin{bmatrix} 69.667 & 45 \\ 45 & 63.774 \end{bmatrix} \cdot (206.7; 232.54) = (-3935.868; 5528.5);$

д) $m^{(1)} = \frac{(-9.7796;10.547)(-3935.868;5528.5)}{(-3935.868;5528.5)(-3935.868;5528.5)} = \frac{96800.3}{4.6055368 \cdot 10^7} = 2.1018 \cdot 10^{-3};$

е) $\vec{I}_{kk}^{(3)} = (33592.965) - 7.9595 \cdot 10^5 \cdot (-221.3587; -215.637) = (5.3766; 2.982)\ A$

и так далее

<u>Метод Ньютона.</u> Алгоритм метода Ньютона $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \check{c}^{(k)} \vec{\varepsilon}^{(k)}$ отличается от алгоритма метода простой итерации тем, что матрица $\check{c}$ не остается постоянной, а определяется для каждого шага приближения по формуле

$$\check{c}^{(k)} = -\left[\check{W}\left(\vec{x}^{(k)}\right)\right]^{-1}.$$

Применительно к нашей задаче

$$\vec{I}_{kk}^{(k+1)} = \vec{I}_{kk}^{(k)} + \check{c}^{(k)} \vec{\varepsilon}^{(k)}$$

$$\check{c}^{(k)} = -\left[\check{W}\left(\vec{I}_{kk}^{(k)}\right)\right]^{-1}.$$

<u>Первое приближение</u>.

$\vec{I}_{kk}^{(0)}, \vec{\varepsilon}^{(0)}$ известны из предыдущих вычислений $c^{(0)}[\check{W}\left(I_{kk}^{(0)}\right)]^1 = \check{c}$, т.е. совпадение с матрицей $\check{c}$ формулы простой итерации. Отсюда совпадают все вычисления первого приближения в методе Ньютона и в методе простой итерации.

В результате определен $\vec{I}_{kk}^{(1)} = (5.3501; 2.9956), A.$

<u>Второе приближение.</u>

$$\check{c}^{(1)} = -\left[\check{W}\left(\vec{I}_{kk}^{(1)}\right)\right]^{-1},$$

Вычислим вначале, подставляя $\vec{I}_{kk}^{(1)}$ в матрицу Якоби (2.8) в точке первого приближения

$$\breve{W}\left(\vec{I}_{kk}^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} 67.456 & 45 \\ 45 & 66{,}5867 \end{bmatrix}.$$

Теперь

$$\breve{c}^{(1)} = [w(I_{kk}^{(1)}]^{-1} = -\frac{1}{66.67} \cdot \begin{bmatrix} 67.456 & -45 \\ -45 & 67.456 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.699 \cdot 10^{-2} & 1.82 \cdot 10^{-2} \\ 1.82 \cdot 10^{-2} & -2.735 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix};$$

$$\varepsilon^{(1)} = \vec{f}\left(I_{kk}^{(1)}\right) = (-1.2738; -0.2082);$$

$$I_{kk}^{(2)} = (5.3501; 2.9956) + \begin{bmatrix} -2.699 \cdot 10^{-2} & 1.82 \cdot 10^{-2} \\ 1.82 \cdot 10^{-2} & -2.734 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} * (-1.2738; -0.2082) = (5.3807; 2.9788), A.$$

<u>Третье приближение</u>.

$$W\left(\vec{I}_{kk}^{(2)}\right) = \begin{bmatrix} 67.31 & -45 \\ -45 & 66.691 \end{bmatrix};$$

$$\breve{c}^{(2)} = -\left[\breve{W}\left(\vec{I}^{(2)}\right)\right]^{-1} = -\frac{1}{2463.97} \cdot \begin{bmatrix} 66.691 & -45 \\ -45 & 67.31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.707 \cdot 10^{-2} & 1.826 \cdot 10^{-2} \\ 1.826 \cdot 10^{-2} & -2.731 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}; \quad \vec{\varepsilon}^{(2)} = (0.032; 0.0493);$$

$$\vec{I}_{kk}^{(3)} = (5.3807; 2.978) + \begin{bmatrix} -2.707 \cdot 10^{-2} & 1.826 \cdot 10^{-2} \\ 1.826 \cdot 10^{-2} & -2.731 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} * (0.032; 0.0493)$$
$$= (5.3807; 2.978) + (-3.3978 \cdot 10^{-5}; -7.62 \cdot 10^{-4}) = (5.3806; 2.9780), A$$

И так далее.

После расчета одним из рассмотренных численных методов значений контурных токов с заданной точностью можно вычислить действительные токи ветвей.

Принимая во внимание направления токов в ветвях цепи, направления и контуры протекания предварительно распределенных токов источников тока (рис. 2.1), а также направления контурных токов (рис. 2.3), для нашей схемы можно записать:

$I_1 = I_{11}$;

$I_2 = I_{22}$;

$I_3 = I_{AB} - I_{11}$;

$I_4 = I_{11} + I_{22} - I_{AB}$; $I_5 = I_{11} + I_{22} - I_{AB} - I_{CD}$.

Значение контурных токов возьмем из третьего приближения метода Ньютона, I_{11} = 5,3806, I_{22} = 2.9780. Тогда токи ветвей:

I_1 = 5.3806 А;

I_2 = 2.9780 А;

I_3 = 8 – 5.3806 = 2.6194 А;

I_4 = 5.3806 + 2.9780 – 8 = 0.3586 А;

I_5 = 5.3806 + 2.9780 – 8 – 4=-3.6414 А.

Напряжение ветвей цепи определим по закону Ома:

$U_1 = E_1 - U(I_1)$, или

$U_1 = E_1 - U(I_1) = 215 - 31.61 \cdot 5.3806 + 0.4139 \cdot 5.3806^3 - 0.00278 \cdot 5.3806^5 = 96.8568\ B$;

$U_2 = -U(I_1) = -31.61 \cdot 2.978 + 0.4139 \cdot 2.978^3 - 0.00278 \cdot 2.978^5 = -83.8544\ B$;

$U_3 = E_3 + r_3 I_3 = 220 - 15 \cdot 2.6194 = 180.709$ В;

$U_4 = -r_4 I_4 = -20 \cdot 0.3586 = -7.172$ В;

$U_5 = -r_5 I_5 = -25 \cdot (-3.6414) = 91.035$ В.

3. ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

Основные вопросы. Точные аналитические методы интегрирования дифференциальных уравнений. Классический и оперативный методы интегрирования линейных уравнений.

Приближенные аналитические методы решения дифференциальных уравнений. Метод степенных рядов. Метод Пикара.

Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Метод Эйлера-Копи. Метод Рунге-Кутта.

Решение краевых задач. Метод конечных разностей.

Решение дифференциальных уравнений в частных производных.

Метод прямых

Для изучения и использования численных методов анализа предлагается произвести интегрирование дифференциальных уравнений одним из одношаговых численных методов при расчете переходного процесса, который возникает после коммутации в нелинейных цепях.

<u>Пример.</u> Вычислить три значения тока ветви с индуктивностью $\psi_1(i_1)$ и напряжения на емкости (U_{c_2}) (рис. 3.1) для моментов времени t=0, t_1=h, t_2=2h, где h – шаг интегрирования. Уравнения состояния цепи поставить на основе метода контурных токов. $i_0=i_1(0)$ в момент включения ветви 2, т.е. при $t_1=0$, $\psi_0=0.05i_0[B_c]$ (рис. 3.2).

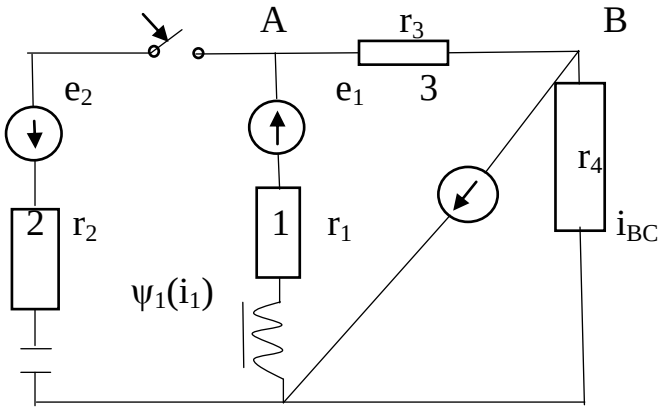


Рис. 3.1

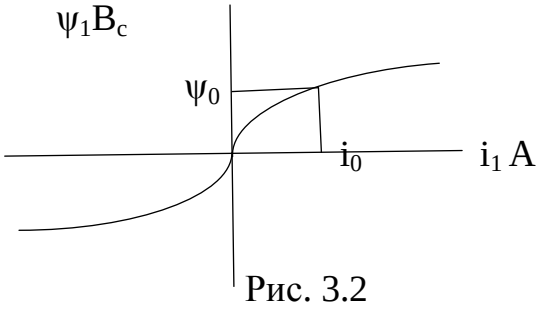


Рис. 3.2

$e_1=E_0=480В$, $C_2=170$ мкф; $e_2=E_m\sin(\omega t+\alpha)=300\sin(\omega t+120^0)В$; $i_{BC}=I_0=8А$; $U_{c_2}(0)=100В$; $\omega=314с^{-1}$;

$r_1=20$ Ом; $r_2=30$ Ом; $r_3=20$ Ом; $r_4=25$ Ом.

При записи уравнений на основе метода контурных токов следует произвести предварительное эквивалентирование источников тока узлов цепи источников ЭДС ветвей, пользуясь приемами, использованными при решении предыдущей задачи. Приняв, что ток замыкается через ветвь 4, получим преобразованную схему, изображенную на рис. 3.3.

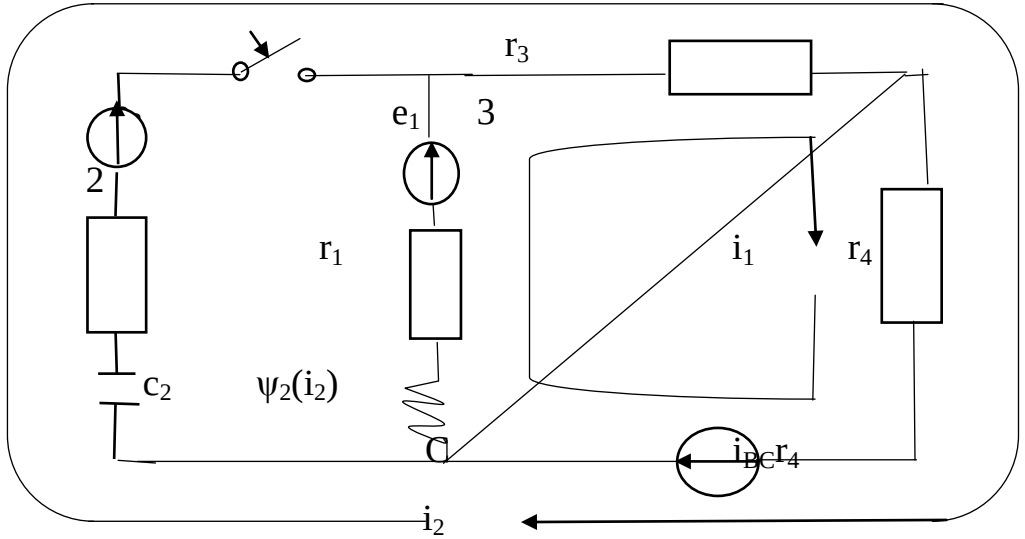


Рис. 3.3

Как и в предыдущей задаче, при составлении уравнений контуры следует выбирать таким образом, чтобы через нелинейный элемент (катушка индуктивности с ферромагнитным сердечником, вебер-амперная, характеристика которой задана графически на рис. 3.3) протекал только один контурный ток.

Выбранные контуры показаны на рис. 3.3. для них запишем уравнения равновесия напряжений схемы после коммутации:

$$(r_1+r_3+r_4)i_1+(r_3+r_4)i_2+\frac{d\varphi_1(i_1)}{dt}=e_1+i_{BC}\cdot r_4$$

$$(r_3+r_4)i_1+(r_2+r_3+r_4)i_2+U_{c_2}=-e_2+i_{BC}\cdot r_4,$$

Которые дополним дифференциальной зависимостью между током и напряжением на конденсаторе

$$C_2 \frac{dU_{c_2}}{dt} = i_2$$

Для физических величин цепи получим

$$65i_1 + 45i_2 + \frac{d\varphi_1(i_1)}{dt} = 480 + 8 \cdot 25 = 680;$$

$$45i_1 + 75i_2 + U_{c_2} = -300\sin(\omega t + 120°) + 200;$$

$$170 \cdot 10^{-6} \frac{dU_{c_2}}{dt} = i_2.$$

Второе контурное уравнение является алгебраическим и его следует исключить, что осуществляется методом подстановок. Из второго уравнения найдем i_2 и подставим его в первое и третье уравнения:

$$i_2 = -\frac{300}{75} \cdot \sin(\omega t + 120°) + \frac{200}{75} - \frac{U_{c_2}}{75} - \frac{45}{75} i_1.$$

После подстановки получим

$$38i_1 + \frac{d\varphi_1(i_1)}{dt} - 0.6\, U_{c_2} = 560 + 180\sin(\omega t + 120°)$$

$$170 \cdot 10^{-6} \frac{dU_{c_2}}{dt} + 0.6i_1 + 0.0133U_{c_2} = 2.6667 - 4\sin(\omega t + 120°)$$

Для использования численных методов анализа Эйлера, Эйлера-Коши и Рунге-Кутта дифференцированные уравнения необходимо привести к системе уравнений первого порядка в нормальном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1(i_1)}{dt} = 560 + 180sin(\omega t + 120°) - 38i_1 + 0.6U_{c_2}; \\ \dfrac{dU_{c_2}}{dt} = 15686.27 - 23529.41sin(\omega t + 120°) - 3529.41i_1 - 78.432U_{c_2}. \end{cases}$$

В векторной форме эта система двух дифференциальных уравнений запишется в виде

$$\left(\frac{d\varphi_1(i_1)}{dt}, \frac{dU_{c_2}}{dt}\right) = [560 + 180\sin(\omega t + 120°) - 38i_1 + 0.6U_{c_2};$$

$$15686.27 - 23529.41\sin(\omega t + 120°) - 3529.41i_1 - 78.432U_{c_2}].$$

Система имеет неизвестные i_1, U_{c_2} и производные

$$\frac{dU_{c_2}}{dt}, \frac{d\varphi_1(i_1)}{dt}$$

Система двух дифференциальных уравнений может быть решено лишь при условии, что содержит две неизвестных и их производные.

Поэтому учитывая, что

$$\frac{d\varphi_1(i_1)}{dt} = \frac{d\varphi_1(i_1)}{dt_1} \cdot \frac{di_1}{dt} = Lg\frac{di_1}{dt}.$$

Решим первое уравнение относительно производной $\frac{di_1}{dt}$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{Lg}\left[560 + 180\sin(\omega t + 120°) - 38i_1 + 0.6U_{c_2}\right].$$

Система уравнений цепи, подготовленная к использованию численных методов интегрирования, запишется в виде

$$\left(\frac{di_1}{dt}, \frac{dU_{c_2}}{dt}\right) = \{\frac{1}{Lg}\left[560 + 180\sin(\omega t + 120°) - 38i_1 + 0.6U_{c_2}\right]$$

$$15686.27 - 23529.41sin(\omega t + 120°) - 3529{,}41i_1 - 78.432U_{c_2}].$$

В этих равенствах Lg – динамическая индуктивность катушки. Зависимость Lg=$f(i_1)$ получается путем дифференцирования потокосцепления $\psi_1(i_1)$ по аргументу i_1. На кривой $\psi_1(i_1)$ (рис. 3.2) задана точка i_0, ψ_0. Для определения координат точки

необходимо определить ток i_0, который протекает через катушку в момент коммутации. По закону коммутации этот ток равняется току в катушке непосредственно перед коммутацией. До коммутации ток протекал лишь в первом контуре, где действуют постоянные вынуждающие силы.

Таким образом, ток i_0 может быть легко вычислен

$$i_0 = i_1(0) = \frac{e_1 + i_{BC} \cdot r_4}{r_1 + r_3 + r_4} = \frac{E_0 + I_0 \cdot r_4}{r_1 + r_3 + r_4} = \frac{480 + 200}{20 + 20 + 25} = 10.462A$$

Теперь вычислим $\psi_0 = 0{,}05 i_0 = 0.05 \cdot 10.462 = 0.5231$[Вс].

Найденные точки i_0, ψ_0 позволяют определить масштаб по осям i_1, ψ_1 (рис. 3,2, 3.4), где для наглядности кривая растянута по оси ψ_1. Зависимость $Lg = f(i_1) = \frac{d\psi_1(i_1)}{di_1}$ построим, используя приближенную замену производной отношением конечных разностей функции и аргумента: $\frac{d\varphi_1(i_1)}{di_1} \approx \frac{\Delta\varphi_1(i_1)}{\Delta i_1}$

Разобьем интервал изменения тока i_1 на равные отрезки Δi_1 с шагом например 1 (рис. 3.4). по кривой определим приращение потокосцепления на каждом интервале изменения тока. Вычислим значения индуктивности для каждого интервала: $Lg^{(k)} = \frac{\Delta\varphi_1{}^{(k)}(i_1)}{\Delta i_1{}^{(k)}}$.

Поскольку на всех интервалах принято $\Delta i_1 = IA$, значение индуктивности на интервале численно совпадает с приращением потокосцепления на этом интервале.

Кривая $Lg = f(i_1)$, построенная на рис.3.5 для положительных значений тока, симметрична относительно оси ординат.

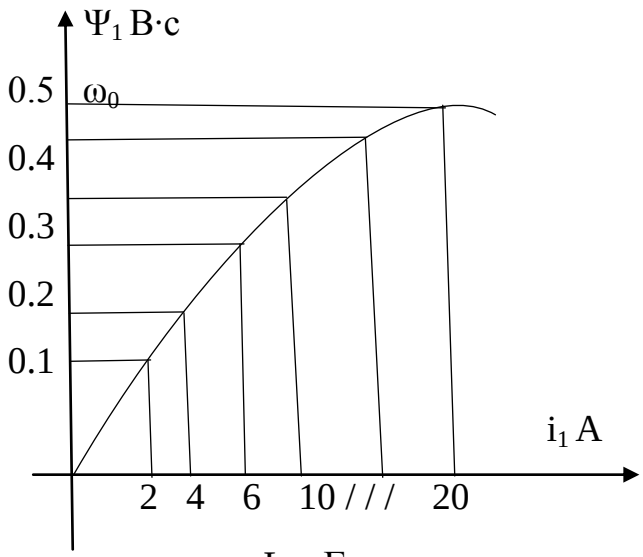


Рис. 3.4

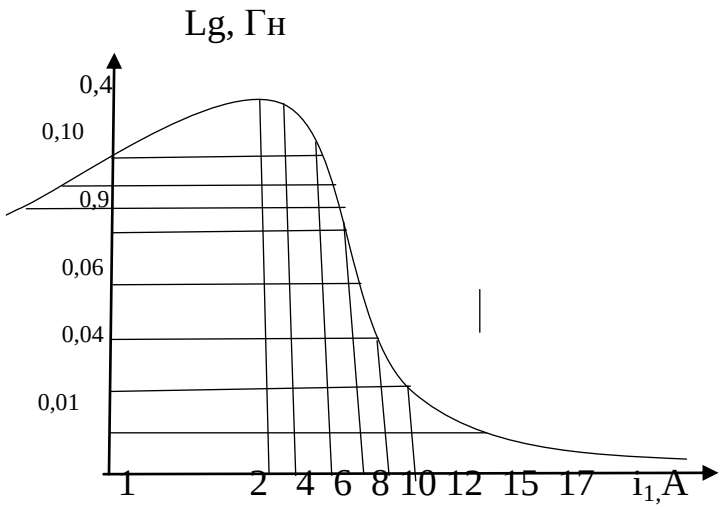


Рис 3.5

$\Delta\psi_1^{(1)}(i_1) = 0.108$ $\quad$ $Lg^{(1)}=0.108$

$\Delta\psi_1^{(2)}(i_1) = 0.106$ $\quad$ $Lg^{(2)}=0.106$

$\Delta\psi_1^{(3)}(i_1) = 0.085$ $\quad$ $Lg^{(3)}=0.085$

$\Delta\psi_1^{(4)}(i_1) = 0.068$ $\quad$ $Lg^{(4)}=0.068$

$\Delta\psi_1^{(5)}(i_1) = 0.050$ $\quad$ $Lg^{(5)}=0.050$

$\Delta\psi_1^{(6)}(i_1) = 0.039$ $\quad$ $Lg^{(6)}=0.039$

$\Delta\psi_1^{(7)}(i_1) = 0.029$ $\quad$ $Lg^{(7)}=0.029$

$\Delta\psi_1^{(8)}(i_1) = 0.021$ $\quad$ $Lg^{(8)}=0.021$

$\Delta\psi_1^{(9)}(i_1) = 0.017$ $\quad$ $Lg^{(9)}=0.017$

$\Delta\psi_1^{(10)}(i_1) = 0.014$ $\quad$ $Lg^{(10)}=0.014$

$\Delta\psi_1^{(11)}(i_1) = 0.011$ $\quad$ $Lg^{(11)}=0.011$

Теперь следует решить вопрос о величине шага интегрирования. Его можно принять равным $\frac{1}{20}\ldots\frac{1}{30}$ периода собственных колебаний цепи (при свободном колебательном процессе), или равным $\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{10}$ от меньшей постоянной времени (при апериодическом свободном процессе):

$$h = \frac{T_b}{20 \div 30} \text{ или } h = \frac{\tau}{3 \div 10}.$$

С другой стороны, шаг интегрирования не должен превышать $\frac{1}{20}\ldots\frac{1}{30}$ периода вынужденных колебаний.

$$h \leq \frac{T}{20 \div 30}, \text{где } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

(ω задана в условии задачи).

Для определения характера свободного прооцесса найдем корни характеристического уравнения цепи, допустив его линейность при Lg= 0,05 Гн. Характеристическое уравнение получим из системы (3.2), приняв, что отсутствует вынуждающие силы и нулевые начальные значения:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{0.05}(-38i_1 + 0.6U_{c_2}).$$

$$\frac{U_{c_2}}{dt} = -3529.41i1 - 78.432U_{c_2}.$$

Операторное изображение уравнений

$$PI_1(P) = \frac{1}{0.05}\left[-380I_1(P) + 0.6U_{c_2}(P)\right];$$

$$PU_{c_2}(P) = -3529.41I_1(P) - 78.432U_{c_2}(P).$$

Исключая методом подстановки $U_{c_2}(P)$, после простых преобразований получим уравнение

$$(p^2 + 838{,}736p + 102002)\ I_1\ (p) = 0.$$

Вычислим корни характеристического уравнения: $p^2 + 838.736p + 102002 = 0$:

$$P_{1.2} = -419.368 \pm \sqrt{419.368^2 - 102002} = -419.368 \pm 271.786$$

$$P_1 = -147.582c^{-1}$$

$$P_2 = -691.154c^{-1}.$$

Корни характеристического уравнения действительные и разные. Это свидетельствует об апериодичном свободном процессе. Постоянные времени цепи имеют такие значения:

$$\tau_1 = \frac{1}{|P_1|} = 6.7758 \cdot 10^{-3}c; \quad \tau_2 = \frac{1}{|P_2|} = 1.4468 \cdot 10^{-3}\ c.$$

Шаг интегрирования определим, исходя из меньшей постоянной времени

$$h \approx \frac{\tau_2}{3 \div 10} - \frac{1.4468 \cdot 10^{-3}}{3 \div 10} c. h = 2 \cdot 10^{-4} c.$$

Если бы корни характеристического уравнения были комплексными сопряженными, свободный процесс имел бы колебательный характер, а круговая частота колебаний была бы равна действительной части корня:

$$P_{1.2} = -a \pm j\omega b.$$

Шаг интегрирования тогда бы определился так:

$$h = \frac{T_b}{20 \div 30} = \frac{2\pi \cdot 1}{\omega b \cdot (20 \div 30)} c.$$

Подготовка к использованию численных методов интегрирования дифференциальных уравнений завершен.

<u>Метод Эйлера.</u> Рабочая формула метода

$$\vec{Y}_{k+1} = \vec{Y}_k + hj(x_k, \vec{y}_k).$$

Значение интегральной функции после к+1 шага интегрирования определится ее значением в начале шага $\vec{y}_k$, скоростью ее изменения в начале шага $\left(\frac{dy}{dx}\right) x_k, \vec{y}_k$ и величиной шага интегрирования – h.

Применительно к уравнениям нашей задачи рабочая формула запишется так:

$$(i_{c_{k+1}}, U_{c_{2k+1}}) = (i_{c_k}, U_{c_{2k}}) + h[(\frac{di_1}{dt})_{t_{k,ik,Uc2k}} (\frac{du_{c_2}}{dt})_{t_{k,ik,Uc2k}}]$$

$(\frac{di_1}{dt})_{t_{k,ik,Uc2k}}$, $(\frac{du_{c_2}}{dt})_{t_{k,ik,Uc2k}}$ находятся соответственно из первого и второго уравнений системы (3.2) при подстановке к правой части, $t_k, i_{1k}, U_{c_{2k}}$

В развернутом виде рабочая формула запишется так

$$\left(i_{1k+1}, U_{c_{2k+1}}\right) = (i_{1k}, U_{c_{2k}}) + 2 \cdot 10^{-4} \begin{cases} \frac{1}{Lg}[560 + 180\sin(\omega t_k + 120°) - 38 i_{1k} + 0.6 U_{c_{2k}}]; \\ 15686.27 - 2359.41 sin(\omega t_k + 120°) - 3529.41 i_1 - 78.432 U_{c_{2k}} \end{cases} \}$$

Первый шаг k=0; k+1=1

$i_{10} = 10,462$ А – ток через катушку в момент коммутации, $t_c = 0$;

Lg = 0.012 Гн – значение индуктивности катушки при токе

$i_1 = 10,462$ А(по кривой рис 3.5);

$U_{c_{20}} = 100$ В – начальное напряжение на конденсаторе (задано в условии задачи);

Фазный угол 120^0 переведен в радианы (2,094 рад).

$$\left(i_1, U_{c_{21}}\right) = (10.462; 100) + 2 \cdot 10^{-4}\left\{\frac{1}{0.012}[560 + 180\sin(314 \cdot 0 + 2.094) - 38 \cdot 10.462 + 0.6 \cdot 100]; 15686.27 - 23529.41\sin(314 \cdot 0 + 2.094) - 3529.41 \cdot 10.462 - 78.432 \cdot 100\right\} = (10.462; 100) + (6.3055; -9.8917) = (16.7675; 90.1081).$$

Второй шаг. k=1; k+1=2

$i_{11} = 16.7675A; U_{c_{21}} = 90.1083\,B; t_1 = 2 \cdot 10^{-4}c;$

*Lg=0.007 Гн(*по кривой рис.3.5 при $i_1 = 16,765$*)*.

$$(i_{12}, U_{c_2}) = (16.7675; 90.1083) + 2 \cdot 10^{-4}\left\{\frac{1}{0.007}[560 + 180(314 \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 16.7675 + 0.6 \cdot 90.1083]; 15686.27 - 23529.41\sin\left((314 \cdot 2 \cdot 10^{-4}) + 2.094\right) - 3529.1 \cdot 16.7675 - 78.432 \cdot 90.1083\right\} = (16.7675; 90.1083) + 3.6237; -14.0318) = (20.3912; 76.0765).$$

Третий шаг. k=1, k+1=3.

$i_{12} = 20.3912\,A;\ U_{c_{2_2}} = 76.0765\,B; t_2 = 4 \cdot 10^{-4}$c;

Lg=0.006 Гн(по кривой рис. 3.5)

$$\left(i_{13};\, U_{c_{2_3}}\right) = (20.3912; 76.0765) + 2 \cdot 10^{-4}$$
$$\cdot \left\{ \frac{1}{0.006} [560 + 180 \cdot (314 \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 20.3912 + 0.6 \cdot 76.0765]; 15686.27 \right.$$
$$\left. - 2352.41 \sin(314 \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3529.41 \cdot 20.3912 - 76.432 \cdot 76.0765 \right\}$$
$$= (20.3912; 76.0765) + (-0.8612; -16.1984) = (19.5299; 59.87804)$$

И так далее.

<u>Метод Эйлера-Коши</u>. В методе Эйлера-Коши приращение на (к+1)-м на шаге определяется как среднее двух приращений. Первое приращение вычисляется по скорости изменения функции в начале шага, второе по скорости в конце шага. В свою очередь, скорость в конце шага определяется для ближайшего значения функции в этой точке, вычисленного по методу Эйлера.

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + \frac{\Delta\vec{y}_k' + \Delta\vec{y}_k''}{2}$$

$$\Delta\vec{y}_k' = h\left(\frac{d\vec{y}}{dx}\right)_{x_k, \vec{y}_k} = h\vec{f}\left(x_k, \vec{y}_k\right);\ \vec{y}_{k+1}{}' = \vec{y}_k + \Delta\vec{y}_k').$$

Применительно к уравнениям задачи, формула метода и последовательность вычислений будут такими:

$$\left(\Delta i_{1k}', \Delta U_{c_{2k}}'\right) = h\left[\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t_k, i_{1k}}, \left(\frac{dU_{c_2}}{dt}\right)_{t_k, i_{1k}, U_{c_{2k}}}\right];$$

$$\left(i_{1k+1}', U_{c_2k+1}'\right) = \left(i_{1k} + \Delta i_{1k}', U_{c_{2k}} + \Delta U_{c_{2k}}'\right);$$

$$(\Delta i_{1k}'', U_{c_{2k+1}}) = (i_{1k} + \Delta i_{1k}', U_{c_{2k}} + \Delta U_{c_{2k}}');$$

$$\left(\Delta i''_{1k}, \Delta U'_{c_{2k}}\right) = h\left[\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t_k+h, i'_{1(k+1)}, \Delta U'_{c_{2k+1}}} \left(\frac{dU_{c_2}}{dt}\right)_{t_k+h, t'_{(k+1)} U_{c_{2k+1}}}\right].$$

$$\left(i_{1_{k+1}}, U_{c_{2_{k+1}}}\right) = \left(i_{1k}, U_{c_{2_k}}\right) + \frac{\frac{\Delta i'_{1k} + \Delta i'_{1k}}{2}, (\Delta U''_{c_{2_k}} + \Delta U''_{c_{2_k}})}{2}$$

.

<u>Первый шаг</u>. к=0, к+1=1.

$i_{10} = 10.462A;\ U_{c_{20}} = 100\ B; Lg = 0.012$ Гн; $t_0 = 0$ (см. исходные данные первого шага етода Эйлера).

$(\Delta i'_{10}, \Delta U_{c_{20}})$=2· $10^{-4}\{\frac{1}{0.012}[560 + 180\sin(314 \cdot 0 + 2.094) - 38 \cdot 10.462 + 0.6 \cdot 100]$;

15686.27-23529.41sin(314· $0 + 2.094) - 3529.41 \cdot 10.462 - 78.432 \cdot 100] = (6.3055; -9.8917)$.

$$\left(i'_{11}; U'_{c_{21}}\right) = \left(i_{10}, U_{c_{20}}\right) + \left(\Delta i'_{10}, \Delta U'_{c_{20}}\right) = (10.462; 100) + (6.3055; -9.8917) = (16.7675; 90.1083)$$

При $i'_{11} = 10.7675$ по кривой рис. 3.5 Lg = 0.007Гн.

$$\left(\Delta i'_{10}, \Delta U'_{c_{20}}\right) = 2 \cdot 10^{-4}\left\{\frac{1}{0.007}[560 + 180\sin(314 \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 16.7675 + 0.6 \cdot 90.1083]; 15686.27 - 23529.41\sin(314 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2.094) - 3529.41 \cdot 16.7675 - 78.432 \cdot 90.1083\right\} = (3.6148; -14.0318);$$

$$\left(i'_{1}, U_{c21}\right) = (10.462 \cdot 100) + \left(\frac{6.3055 + 3.6248}{2}\right); \frac{-9.8917 - 14.0318}{2}) = (15.42715; 88.0382).$$

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + \frac{\Delta\vec{y}_k' + \Delta\vec{y}_k''}{2},$$

<u>Второй шаг</u>. k=1; k+1=2

$i_{11} = 15.42715A;\ U_{c_{21}} = 88.0382B;\ Lg = 0.0075\text{Гн};\ t_1 = 2 \cdot 10^{-4}c$

$$\left(\Delta i_{11}', \Delta U_{c_{21}}\right) = 2 \cdot 10^{-4}\left\{\frac{1}{0.0075}[560 + 180\sin(314 \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 15.42715 + 0.6 \cdot 88.0382]; 15686.27 - 23529.41\sin(314 \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3529.41 \cdot 15.42715 - 78.432 \cdot 88.0382\right\} = (4.7083; -13.053)$$

$(i_{12}' U_{c_{2_2}}') = (15.42715; 88.0382) + (4.7083; 13.053) = (20.13545; 74.9854).$

При $i_{12}' = 20{,}13545$ по кривой рис. 3.5 Lg=0.006 Гн

$$\left(\Delta i_{11}', \Delta U_{c_{21}}^{i}\right) = 2 \cdot 10^{-4}\left\{\frac{1}{0.006}[560 + 180\sin(314 \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 20.13545 + 0.6 \cdot 74.9854]; 15686.27 - 23529.41\sin(314 \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3529.41 \cdot 20.13545 - 78.432 \cdot 74.9854\right\} = (-0.5596; -16.000);$$

$$\left(i_{12}, U_{c_{2_2}}\right) = (15.42715; 88.0382) + \left(\frac{4.7083 - 0.5596}{2}; \frac{13.053 - 16.000}{2}\right) = (17.5015; 73.5117).$$

<u>Третий шаг</u>. к=2, к+1=3.

$i_{12} = 17.5015\,A;\ U_{c_{2_2}} = 73.5117\,B; Lg = 0.0067\,\text{Гн};\ t_2 = 4 \cdot 10^{-4}c.$

$$\left(\Delta i'_{12}, \Delta U'_{c_{22}}\right) = 2 \cdot 10^{-4}\left\{\frac{1}{0.0067}[560 + 180\sin(314 \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 17.5015 + 0.6 \cdot 78.5117]; 15686.27 - 23529.41\sin[314 \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3529.41 \cdot 17.5015 - 78.432 \cdot 78.5117\right\} = (2.5497; -14.1964).$$

$$\left(i'_{13}, U'_{c_{2з}}\right) = (17.6117) + (2.5497; -14.1964) = (20.0512; 59.4153)$$

При i'_{13} =20,0512 по кривой рис. 3,5 Lg0.0062 Гн.

$$\left(\Delta i'_{12}, \Delta U'_{c_{22}}\right) = 2 \cdot 10^{-4}\{\frac{1}{0.0062}[560 + 180\sin(314 \cdot 6 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 20.0512 + 0.6 \cdot 59.4153]: 15686.27 - 23529.41\sin(314 \cdot 6 \cdot 10^{-4} + 2.09) - 3529.41 \cdot 20.0512 - 78.432 \cdot 59.4153\} = (-0.96708; -15.5123).$$

$$\left(i_{13}, U_{c2_з}\right) = (17.5015; 73.5117) + \left(\frac{2.5497 - 0.96708}{2}; \frac{-14.1964 - 15.5123}{2}\right) = (18.2928; 58.65735)$$

И так далее.

<u>Метод Рунге-Кутта.</u> В методе Рунге-Кутта для достижения большой точности осуществляется более сложное по сравнению с методом Эйлера-Коши усреднение функции на каждом шаге вычислений.

Алгоритм метода Рунге-Кутта для вычисления значимого многомерного вектора переменных после (к+1)-го шага интегрирования имеет следующий вид:

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + \Delta\vec{y}_k; \quad \Delta\vec{y}_k = \frac{1}{6}\left[\vec{k}_{1k} + 2\left(\vec{k}_{2k} + \vec{k}_{3k}\right) + \vec{k}_{4k}\right],$$

где

$$\vec{k}_{1k} = h\vec{f}\left(x_k, \vec{y}_k\right);$$

$$\vec{k}_{2k} = h\vec{f}\left(x_k + \frac{h}{2}, \vec{y}_k + \frac{\vec{k}_{1k}}{2}\right);$$

$$\vec{k}_{3k} = h\vec{f}\left(x_k + \frac{h}{2}, \vec{y}_k + \frac{\vec{k}_{2k}}{2}\right);$$

$$\vec{k}_{4k} = h\vec{f}\left(x_k + h, \vec{y}_k + \vec{k}_{3k}\right).$$

Применительно к уравнениям задачи алгоритм метода запишется так:

$$\left(i_{1k+1}, U_{c2_{k+1}}\right) = \left(i_{1k}, U_{c2_k}\right) + \left(\Delta i_{1k}, \Delta U_{c2_k}\right)$$

Для упрощения индексов при k вместо i_1, U_{c_2} будем писать (i, U)

$$\left(\Delta i_{1k}, \Delta U_{c2_k}\right) = \frac{1}{6}\{(k_{1ik}, k_{1uk}) + 2[(k_{2ik}, k_{2uk}) + (k_{3ik}, k_{3uk})] + (k_{4ik}, k_{4uk})\}$$

Где

$$(k_{1ik}, k_{1uk}) = h\left[\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{i1k+k3ik}, U_{c2k+k3uk}, t_k + h; \left(\frac{dU_{c2}}{dt}\right)_{i1k+k3uk}, U_{c2_k} + K_{3U_k}, \qquad t_k + h\right].$$

<u>Первый шаг.</u> k=0, k+1=1

(исходные данные для вычисления $\vec{k}_{10} = (k_{1i_0}, k_{1U_0})$;

$i_{10} = 10.462A; U_{c2_0} = 100\ B; Lg = 0.012$ Гн; $t_0 = 0c$

(смотри выходные данные первого шага метода Эйлера).

$$\left(k_{1i_0}, k_{1U_0}\right) = 2 \cdot 10^{-4}\left\{\frac{1}{0.012}[560 + 180\sin(314 \cdot 0 + 2.094) - 38 \cdot 10.462 + 0.6 \cdot 100]; 15686.27 - 29529.41\sin(314 \cdot 0 + 2.094) - 3529.41 \cdot 10.462 - 78.432 \cdot 100\right\} = (6.3055; -9.8917).$$

Исходные данные для вычисления $\vec{k}_{20} = \left(k_{2i_0}, k_{2U_0}\right)$;

$$i_{10} + \frac{k_{1i_0}}{2} = 13.6147A; Lg = 0.0085\text{Гн};\ U_{c2_0} + \frac{k_{1U_0}}{2} = 95.0541\ B;$$

$$\left(k_{2i_0}, k_{2U_0}\right) = 2 \cdot 10^{-4}\left\{\frac{1}{0.0085}[560 + 180\sin(314^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 13.6147 + 0.6 \cdot 95.0541]; 15686.27 - 23529.41\sin(314 \cdot 1 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3529.41 \cdot 13.6147 - 78.432 \cdot 95.0541\right\} = (5.9457; -11.9647).$$

Исходные данные для вычисления $\vec{k}_{30} = (k_{3i0}, k_{3u0})$:

$$i_{10} + \frac{k_{2i_0}}{2} = 13.4348A; Lg = 0.0085\text{Гн};\ U_{c_{20}} + \frac{k_{2U_0}}{2} = 94.01765;$$

$$t_{10} + \frac{h}{2} = 1 \cdot 10^{-4}c$$

$$(k_{3i_0}, k_{2u_0}) = 2 \cdot 10^{-4}\left\{\frac{1}{0.0085}[560 + 180\sin(314 \cdot 1 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 13.4948 + 0.6 \cdot 94.01465]; 15686.27 - 23529.41\sin(314 \cdot 1 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3529.41 \cdot 13.4348 - 78.432 \cdot 94.01765\right\} = (6.0919; -11.8214);$$

Исходные данные для вычисления $\vec{k}_{4_0} = \left(k_{4i_0}, k_{4u_0}\right)$:

$i_{10} + k_{3i_0} = 16.5539, A; Lg = 0.007$Гн; $U_{c2_0} + k_{3u_0} = 88.1786\ B; t + h = 2 \cdot 10^{-4} c$

$$\left(k_{4i_0}, k_{4u_0}\right) = 2 \cdot 10^{-4} \left\{\frac{1}{0.007} \cdot [560 + 180 \sin(314 \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 16.5539 + 0.6 \cdot 88.1786]; 15686.27 - 23529.41 \sin(314 \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3529.41 \cdot 16.5539 - 78.432 \cdot 88.1786\right\} = (3.8518;\ -13.8776).$$

Приращение тока через катушку i_1 и напряжение на конденсаторе U_{c_2} за первый шаг интегрирования

$$\left(\Delta i_{10}, \Delta U_{c2_0}\right) = \frac{1}{6}\{[6.3055 + 2(5.9457 + 6.0919) + 3.8518]; [-9.8917 + 2(-11.9647 - 11.8214) - 13.8446]\} = (5.7052; -11.89).$$

Значение тока i_1 и напряжения U_{c_2} в конце первого шага интегрирования

$$\left(i_1, U_{c_{21}}\right) = \left(i_{10}, U_{c_{20}}\right) + \left(\Delta i_{10}, \Delta U_{c2_0}\right) = (10.462; 100) + (5.7052; -11.89) = (16.1672; 88.11).$$

<u>Второй шаг</u>. k=1; k+1=2

Исходные данные для вычисления $\vec{k}_{11} = \left(k_{1i_1}, k_{1u_1}\right)$:

$$\left(k_{1i_1}, k_{1u_1}\right) = 2 \cdot 10^{-4} \left\{\frac{1}{0.0073} \cdot [560 + 180 \sin(314 \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 16.1672 + 0.6 \cdot 88.11]; 15686.27 - 23529.41 \sin(314 \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3525.41 \cdot 16.1672 - 78.432 \cdot 88.11\right\} = (4.9137; -13.6021).$$

Исходные данные для вычисления $\vec{k}_{21} = \left(k_{2i_1}, k_{2u_1}\right)$:

$$i_{11} + \frac{k_{1i_1}}{2} = 18.624 A; Lg = 0.0065\text{Гн}; U_{c_{21}} + \frac{k_{1u_1}}{2} = 81.3089\ B;$$

$$t_1 + \frac{h}{2} = 3 \cdot 10^{-4} c;$$

$$(k_{2i_1}, k_{2u_1}) = 2 \cdot 10^{-4} \left\{ \frac{1}{0.0065} [560 + 180 \sin(314 \cdot 3 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 18.624 + 0.6 \cdot 81.3089]; 15686.27 - 23529.41 \sin(314 \cdot 3 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3529.41 \cdot 18.624 - 78.432 \cdot 81.3089 \right\} = (1.4721; -15.2286)$$

Исходные данные для вычисления $\vec{k}_{31} = (k_{3i_1}, k_{3u_1})$.

$$i_{11} + \frac{k_{21_1}}{2} = 16.9032A; Lg = 0.0067\text{Гн}; U_{c_{21}} + \frac{k_{2u_1}}{2} = 80.4957\ B;$$

$$t_1 + \frac{h}{2} = 3 \cdot 10^{-4} c;$$

$$\left(k_{3i_1}, k_{3u_1}\right) = 2 \cdot 10^{-4} \left\{ \frac{1}{0.0067} [560 + 180 \sin(314 \cdot 3 \cdot 10^{-4} + 2{,}094) - 38 \cdot 16{,}9032 + 0{,}6 \cdot 80{,}4957]; 15686.27 - 23529.41 \sin(314 \cdot 3 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3529.41 \cdot 16.9032 - 78.432 \cdot 80.4957 \right\} = (3.3655; -13.8942).$$

Исходные данные для вычисления $\vec{k}_{41} = (k_{4i_1}, k_{4u_1})$.

$$i_{11} + k_{3i_1} = 19.5327A; Lg = 0.0061\ \text{Гн}; U_{c_{21}} + k_{3u_1} = 74.2158\ B;$$

$$t_1 + h = 4 \cdot 10^{-4} c.$$

$$\left(k_{4i_1}, k_{4u_1}\right) = 2 \cdot 10^{-4} \left\{ \frac{1}{0.0061} \cdot [560 + 180 \sin(314 \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 19.5327 + 0.6 \cdot 74.2158]; 15686.27 - 23529.41 \sin(314 \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3529.41 \cdot 19.5327 - 78.432 \cdot 74.2158 \right\} = (1.0873; -15.5628).$$

Приращение тока через катушку i_1 и напряжение на конденсаторе U_{c_2} при втором шаге интегрирования

$$\left(\Delta i_1, \Delta U_{c2_1}\right) = \frac{1}{6}\{[4.9137 + 2(1.4721 + 3.3655) - 1.0873]; [-13.6021 + 2(-15.2286 - 13.8942) - 15.5628]\}$$
$$= (2.3583; -14.5684).$$

Значение тока i_1 и напряжения U_{c_2} в конце второго шага интегрирования

$$\left(i_{12}, U_{c_{2_2}}\right) = \left(i_1, U_{c_{2_1}}\right) + \left(\Delta i_1, \Delta U_{c2_1}\right) = (16.1672; 88.11) + (2.3583; -14.5684) = (18.5255; 73.5415).$$

<u>Третий шаг</u>. k=2, k+1=3.

Исходные данные для вычисления $\vec{k}_{12} = \left(k_{1i_2}, k_{1u_2}\right)$:

$$i_{1_2} = 18.5255\ A; Lg = 0.0064\ \text{Гн}; U_{c_2} = 73.5415\ B;\ t_2 = 4 \cdot 10^{-4} c.$$

$$\left(k_{1i_2}, k_{1u_2}\right) = 2$$
$$\cdot 10^{-4}\left\{\frac{1}{0.0064}[560 + 180\sin(314 \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 18.5255 + 0.6 \cdot 73.5415]; 15686.27\right.$$
$$\left. - 23529.41\sin(314 \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3529.41 \cdot 18.6199 - 78.432 \cdot 74.0219\right\} = (1.36; -14.8413).$$

Исходные данные для вычисления $\vec{k}_{2_2} = \left(k_{2i_2}, k_{2u_2}\right)$:

$$i_{1_2} + \frac{k_{1i_2}}{2} = 19.2055 A; Lg = 0.0062\ \text{Гн}; U_{c_{2_2}} + \frac{k_{1u_2}}{2} = 66.1208\ B;\ t_2 + \frac{h}{2} = 5 \cdot 10^{-4} c.$$

$$\left(k_{2i_2}, k_{2u_2}\right) = 2$$
$$\cdot 10^{-4}\left\{\frac{1}{0.0062}[560 + 180\sin(314 \cdot 5 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 19.2055 + 0.6 \cdot 66.1208]; 15686.27\right.$$
$$\left. - 23529.41\sin(314 \cdot 5 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3529.41 \cdot 19.2055 - 78.432 \cdot 66.1208\right\} = (0.3162; -15.1153).$$

Исходные данные для вычисления $\vec{k}_{3_2} = (k_{3i_2}, k_{3u_2})$:

$$i_{1_2} + \frac{k_{2i_2}}{2} = 18.6836\ A; Lg = 0.0063\ \text{Гн}; Uc_{2_2} + i_{1_2} + \frac{k_{2u_2}}{2} = 65.9838\ B; t_2 + \frac{h}{2} = 5 \cdot 10^{-4} c.$$

$$(k_{3i_2}, k_{3u_2}) = 2 \cdot 10^{-4} \left\{ \frac{1}{0.0063} [560 + 180 \sin(314 \cdot 5 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 18.6836 + 0.6 \cdot 65.9838]; 15686.27 - 23529.41 \sin(314 \cdot 5 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3529.41 \cdot 18.6836 - 78.432 \cdot 65.9839 \right\} = (0.9382; -14.7448).$$

Исходные данные для вычисления $\vec{k}_{4_2} = (k_{4i_2}, k_{4u_2})$:

$$i_{1_2} + k_{3i_2} = 19.4637\ A; Lg 0.0062\ \text{Гн}; U_{c_{2_3}} + k_{3u_2} = 58.7968\ B;$$

$$t + h = 6 \cdot 10^{-4} c;$$

$$(k_{4i_2}, k_{4u_2}) = 2 \cdot 10^{-4} \left\{ \frac{1}{0.0062} \cdot [560 + 180 \sin(314 \cdot 6 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 38 \cdot 19.4637 + 0.6 \cdot 58.7968]; 15686.27 - 23529.41 \sin(314 \cdot 6 \cdot 10^{-4} + 2.094) - 3529.41 \cdot 19.4637 - 78.432 \cdot 58.7968 \right\} = (-0.2589; -15.0879).$$

Приращение тока через катушку i_1 и напряжения на конденсаторе U_{c_2} на третьем шаге интегрирования

$$(\Delta i_{12}, \Delta U_{c2_2}) = \frac{1}{6} \{[1{,}36 + 2(0{,}3162 + 0{,}9382) - 0{,}2589]; [-14.8413 + 2(-15.1153 - 14.7448) - 15.0879]\} = (0.6015; -14.9415)$$

Значения тока i_1 и напряжения U_{c_2} в конце третьего шага интегрирования

$$(i_{1_3}, U_{c_{2_3}}) = (i_{12}, U_{c2_2}) + (\Delta i_{12}, \Delta U_{c2_2}) = (18.5255; 73.5415) + (0.6016; -14.9415) = (19.1271; 58.5999)$$

И так далее.

4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

Основные вопросы. Основные положения теории вероятностей. Событие. Вероятность события. Взаимосвязь событий.

Основные теоремы вероятностей. Теория сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Бейеса (теорема гипотез). Повторение опытов.

Случайные величины. Функция и плотность распределения. Законы распределения случайных величин.

Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание случайных величин. Основные теоремы. Математическое ожидание случайных величин при разных законах распределения. Дисперсия случайной величины. Стандартное отклонение. Дисперсия и стандартное отклонение при основных законах распределения. Мода, медиана и момент случайной величины.

Система случайных величин. Основные теоремы и числовые характеристики систем случайных величин (многомерных векторов случайных).

Закон больших числе.

Основы математической статистики. Статистические законы распределений и статистические числовые характеристики случайных величин.

Выравнивание (аппроксимация) статистических законов распределения.

Основные положения теории случайных функций.

Метод Монте-Карло в задачах электроэнергетики.

Элементы математических основ теории надежности.

Для получения навыков применения основных положений теории вероятностей в конкретных электроэнергетических задачах предлагается задание выбора оптимального числа резервных агрегатов (см. задачу 4).

Необходимо определить оптимальное число резервных трансформаторов подстанции, если для обеспечения максимальной мощности загрузки необходимо n однотипных агрегатов мощностью Рн каждый; вероятность повреждения трансформаторов q, распределение вероятностей действительной нагрузки задано в виде распределения:

Мощность Загрузки	$P_{1=}IP_H$	$P_2=(n-1)P_H$	$P_3=(П-1)P_H$	…	$P_n=P_H$
Вероятность	P_1	P_2	P_3	…	P_n

Ущерб от непокрытия нагрузки на 1 кВт.ч составляет $ʒ_0$ руб/кВт.ч. Расчетные потери на каждый новый агрегат составляет B_0 руб/год.

При сравнении нескольких вариантов резервирования оптимальным, очевидно, является вариант, который обеспечивает минимум ежегодных расчетных народнохозяйственных затрат. Эти затраты имеют две составляющие: затраты на резервные трансформаторы и вероятный ущерб от перерыва нагрузки из-за выхода из строя трансформаторов подстанции, т.е.

$$З_s = SB_0 + M(З)_{n+s}, \quad (4.1)$$

Где $З_s$ – ежегодные расчетные затраты при S резервных трансформаторах;

$M(З)_{n+s}$ – математическое ожидание ущерба от перерыва нагрузки при S резервных трансформаторах.

Первое слагаемое уравнение (4.1) вычисляется просто, так как задано в условии задачи B_0.

Второе слагаемое $M(З)_{n+s}$ определяется, исходя из математического ожидания перерыва нагрузки по энергии за год

$$M(W_{деф})_{n+s} = M(W_{деф})_{n+s} \cdot З_0$$

В свою очередь, $M(W_{деф})_{n+s}$ определяется через математическое ожидание дефицита мощности $M(P_{деф})_{n+s}$ и продолжительности года – 8760ч.

$$M(W_{деф})_{n+s} = M(P_{деф})_{n+s} \cdot 8760.$$

При заданном дискретном графике нагрузки мощности дефицит мощности с определенной степенью вероятности может принимать только дискретные значения - $P_н$, 2 $P_н$, 3$P_н$, … , П$P_н$. Математическое ожидание дискретной случайной величины – M(x), как известно, равно сумме произведений значений случайной величины на вероятность этих значений:

$$M(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k P_k.$$

Поэтому

$$M\left(P_{\text{деф}}\right)_{n+3} = \sum_{k=1}^{n} \left(kP_{\text{ндеф}}\right) p\left(kP_{\text{ндеф}}\right) \quad (4.2)$$

Теперь необходимо определить вероятность дефицита равных величин мощностей $p\left(kP_{\text{ндеф}}\right)$.

Рассмотрим вначале вариант без резервных трансформаторов (S = 0). Дефицит мощности $P_{\text{ндеф}}$ возникает в тех случаях, когда мощность нагрузки подстанции превышает суммарную мощность неповрежденных трансформаторов:

Когда при нагрузке $\text{П}P_{\text{н}}$ выйдет из строя один трансформатор (суммарная мощность неповрежденных трансформаторов $(\text{П-1})P_{\text{н}}$) – событие $D_{\text{n-c, n-c-1}}$

Когда при нагрузке $P_{\text{н}}$ выйдут из строя все П трансфоматоров – событие $D_{1,\text{ n-n}}$.

Событие D_1 (возникновение дефицита мощности $P_{\text{н g=ф}}$), очевидно, является суммой перечисленных несовместных событий

$$D_1 = D_{n,n+1} + D_{n,n+1,n-2} + \cdots + D_{n-c,n-c-1} + \cdots + D_{1,n-n}$$

По теореме сложения вероятностей

$$p\left(P_{\text{н деф}}\right) = p(D_1) = p\left(D_{n,n-1}\right) + p\left(D_{n-1,n-2}\right) + \cdots + p\left(D_{n-2,n-c-1}\right) + \cdots p\left(D_{1,n-n}\right)$$

Каждое из событий-слагаемых ($D_{n,n-1}, D_{n-1,n-2\ \ldots}$) в свою очередь является сложным событием. Так, событие $D_{n,n-1}$ заключается в совместном возникновении (т.е является произведением) двух событий: нагрузки подстанции – пРн и выхода из строя трансформаторов. Вероятность первого из событий –p1 (задана в условии); вероятность другой – (1-p1). Принимая эти события независимыми, по теореме умножения вероятностей получим

$$\text{P}\left(Д_{\text{п,п}-1}\right) = P_1 \cdot q'_n,$$

Соответственно

$$\text{Р}\left(\text{Д}_{\text{п}-1,\text{п}-2}\right) = P_2 \cdot q_n^2$$

....

$$\text{Р}\left(\text{Д}_{\text{п}-c,\text{п}-c-1}\right) = P_{1+c} \cdot q_n^{1+c}$$

....

$$\text{Р}\left(\text{Д}_{1,\text{п}-\text{п}}\right) = P_n \cdot q_n^n.$$

Учитывая выражение (4.3), получим

$$\text{р}\left(\text{Р}_{\text{н деф}}\right)_n = P_1 \cdot q_n^1 + P_2 \cdot q_n^2 + \cdots + P_{1+c} \cdot q_n^{1+c} + \cdots + P_n \cdot q_n^n.$$

Рассуждая аналогично об условиях возникновения других величин дефицита мощности, получим

$$\text{р}\left(2\text{Р}_{\text{н деф}}\right)_n = p_1 \cdot q_n^2 + p_2 \cdot q_n^3 + \cdots + p_{1+c} \cdot q_n^{2+c} + \cdots p_{n-1} \cdot q_n^n;$$

$$\text{р}\left(3\text{Р}_{\text{н деф}}\right)_n = p_1 \cdot q_n^3 + p_2 \cdot q_n^{l+1} + \cdots + p_{1+c} \cdot q_n^{l+c} + \cdots p_{n-c+1} \cdot q_n^n;$$

…

$$\text{р}\left(l\text{Р}_{\text{н деф}}\right)_n = p_1 \cdot q_n^l + p_2 \cdot q_n^{l+1} + \cdots + p_{1+c} \cdot q_n^{l+c} + \cdots p_{n-l+1} \cdot q_n^n;$$

$$\text{р}\left(\text{ПР}_{\text{н деф}}\right)_n = P_1 \cdot q_n^n.$$

Вероятность повреждения отдельных совокупностей агрегатов определяется по формуле биноминального распределения

$$q_n^1 = c_n^1 \cdot q \cdot p^{n-1};$$

$$q_n^2 = c_n^2 \cdot q^2 \cdot p^{n-2};$$

$$q_n^m = c_n^m \cdot q^m \cdot p^{n-m};$$

$$q_n^n = q^n;$$

$$c_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Здесь p=1-q – вероятность неповрежденного состояния агрегата.

По данным условиям задачи выполняются вначале расчеты для случая отсутствия резервного трансформатора и определяются $З_0$.

Теперь примем, что установлен один резервный агрегат, и для (n+1) агрегатов повторим все расчеты.

Необходимо иметь в виду, то при наличии одного, двух и т.д. резервных трансформаторов дефицит мощности может возникнуть лишь при выходе из строя больше одного (двух и т.д.) трансформатора. Поэтому находим следующие вероятности повреждения разных совокупностей агрегатов (при S=1):

$$q_{n+1}^2 = c_{n+1}^2 \cdot q^2 \cdot p^{(n+1)-2};$$

$$q_{n+1}^3 = c_{n+1}^3 \cdot q^3 \cdot p^{(n+1)-3};$$

….

$$q_{n+1}^m = c_{n+1}^m \cdot q^m \cdot p^{(n+1)-m};$$

$$q_{n+1}^{n+1} = q^{n+1}$$

Вероятность дефицита мощности будет теперь определяться так:

$$\mathrm{p}\left(\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_{n+1} = p_1 \cdot q_{n+1}^2 + p_2 \cdot q_{n+1}^3 + \cdots + p_{1+c} \cdot q_{n+c}^{2+c} + \cdots p_n \cdot q_{n+1}^{n+1};$$

$$\mathrm{p}\left(2\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_{n+1} = p_1 \cdot q_{n+1}^3 + p_2 \cdot q_{n+1}^4 + \cdots + p_{1+c} \cdot q_{n+c}^{3+c} + \cdots p_n \cdot q_{n+1}^{n+1};$$

…

$$\mathrm{p}\left(L\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_{n+1} = p_1 \cdot q_{n+1}^{l+1} + p_2 \cdot q_{n+1}^{l+2} + \cdots + p_{1+c} \cdot q_{n+c}^{l+s+c} + \cdots p_n \cdot q_{n+1}^{n+1};$$

…

$$\text{р}\left(\text{пР}_{\text{н деф}}\right)_{n+1} = P_1 \cdot q_{n+1}^{n+1}$$

Продолжая далее расчет, находим $\text{М}\left(\text{Р}_{\text{н деф}}\right)_{n+1}, \text{М}\left(W_{\text{н деф}}\right)_{n+1}$

$\text{М}(З)_{n+1}$, $З_1^0$.

Проводим расчеты для (П+2), (П+3) и т.д. агрегатов до тех пор, пока ежегодные расчеты народнохозяйственных затрат варианта резервирования не превысит затрат предыдущего. Это значит, что затраты на резервные трансформаторы варианта, который рассматривается, не оправданы соответствующим уменьшением ущерба от перерывов нагрузки. Оптимальным является предыдущий вариант с меньшими затратами. Сведения результатов вычислений в таблицу удобно и наглядно.

Производим расчет для таких исходных данных

П=4; $Р_н$ = 100 МВ.А; q=0,002.

Мощность нагрузки МВ.А	400	300	200	100
Вероятность	0,2	0,4	0,3	0,1

$В_0$ =44 т.руб/год; $З_0$=1,2руб/кВт.ч.

1. Резервные трансформаторы осутствуют, S=0.

Вероятность повреждения отдельных совокупностей трансформаторов:

$$q_4^1 = C_4^1 q p^{4-1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0.002 \cdot 0.998^3 = 7.952 \cdot 0.96 \cdot 10^{-3};$$

$$q_4^2 = C_4^2 q^2 p^{4-2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} \cdot 0.002^2 \cdot 0.998^2 = 2.390409 \cdot 10^{-5};$$

$$q_4^3 = C_4^3 q^3 p^{4-3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} \cdot 0.002^3 \cdot 0.998 = 3.1936 \cdot 10^{-8};$$

$$q_4^4 = q^4 = 0.002^4 = 1.6 \cdot 10^{-11}.$$

Вероятность дефицита различных значений мощности:

$$\mathrm{p}\left(\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_4 = p_1 \cdot q_4^1 + p_2 \cdot q_4^2 + p_3 \cdot q_4^3 + p_4 \cdot q_4^4$$
$$= 0{,}2 \cdot 7{,}952096 \cdot 10^{-3} + 0{,}4 \cdot 2{,}390409 \cdot 10^{-5} + 0{,}3 \cdot 3{,}1936 \cdot 10^{-8} + 0{,}1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-11}$$
$$= 1{,}599990 \cdot 10^{-3};$$

$$\mathrm{p}\left(2\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_4 = p_1 \cdot q_4^2 + p_2 \cdot q_4^3 + p_3 \cdot q_4^4 = 0.2 \cdot 2.390409 \cdot 10^{-5} + 0.4 \cdot 3.1936 \cdot 10^{-8} + 0.3 \cdot 1.6 \cdot 10^{-4}$$
$$= 4.793597 \cdot 10^{-5};$$

$$\mathrm{p}\left(3\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_4 = p_1 \cdot q_4^3 + p_2 \cdot q_4^4 = 0.2 \cdot 3.1936 \cdot 10^{-8} + 0.4 \cdot 1.6 \cdot 10^{-11} = 6.3936 \cdot 10^{-9}$$

$$\mathrm{p}\left(4\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_4 = p_1 \cdot q_4^4 = 0.2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-11} = 3.2 \cdot 10^{-12}.$$

Математическое ожидание дефицита мощности:

$$\mathrm{M}\left(\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_4 = \mathrm{Pн} \cdot \mathrm{p}\left(\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_4 + 2\mathrm{Pн} \cdot \mathrm{p}\left(2\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_4 + 3\mathrm{Pнр} \cdot \left(3\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_4 + 4\mathrm{Pнр} \cdot \left(4\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_4 =$$
$$= 100(1{,}59999 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 4{,}793597 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 6{,}3936 \cdot 10^{-9} + 4 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-12}) =$$
$$= 1{,}609881 \cdot 10^{-1}\,[\text{МВт}].$$

Математическое ожидание дефицита (перерыва нагрузки) по энергии за год:

$$\mathrm{M}\left(W_{\text{деф}}\right)_4 = \mathrm{M}\left(\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_4 8760 = 1410.2557[\text{МВт.ч}] = 1410255{,}7\,[\text{кВт.ч}]$$

Математическое ожидание стоимости ущерба:

$$\mathrm{M}(3)_4 = \mathrm{M}\left(W_{\text{деф}}\right)_4 * 3_0 = 1410006\text{кВт.час.}\frac{1{,}2\text{руб}}{\text{кВтч}} = 1692007\ \text{руб.}$$

Так как рассматриваем вариант без резервных трансформаторов, S=0:

$З_0$=М(З)$_4$= 1692007 руб

2. Установлен один резервный трансформатор S=1, П+S=5.

Вероятность повреждения отдельных совокупностей агрегатов:

$$q_5^2 = C_5^2 q^2 p^3 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0.002^2\cdot 0.998^3 = 3{,}976048\cdot 10^{-3};$$

$$q_5^3 = C_5^3 q^3 p^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}\cdot 0.002^3\cdot 0.998^2 = 7{,}968032\cdot 10^{-8};$$

$$q_5^4 = C_5^4 q^4 \mathrm{p} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1}\cdot 0.002^4\cdot 0.998 = 7{,}984\cdot 10^{-11};$$

$$q_5^5 = q^5 = 0.002^5 = 3.2\cdot 10^{-14}.$$

Вероятность дефицита различных значений мощности:

$$\begin{aligned}\mathrm{p}\left(\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_5 &= p_1\cdot q_5^2 + p_2\cdot q_5^3 + p_3\cdot q_5^4 + p_4\cdot q_5^5\\ &= 0.2\cdot 3.976048\cdot 10^{-5} + 0.4\cdot 7.968032\cdot 10^{-8} + 0.3\cdot 7.984\cdot 10^{-11} + 0.1\cdot 3.2\cdot 10^{-14}\\ &= 7.983992\cdot 10^{-6};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{p}\left(2\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_5 &= p_1\cdot q_5^3 + p_2\cdot q_5^4 + p_3\cdot q_5^5 = 0.2\cdot 7.968032\cdot 10^{-8} + 0.4\cdot 7.984\cdot 10^{-11} + 0.3\cdot 3.2\cdot 10^{-14}\\ &= 1.596801\cdot 10^{-8}\end{aligned}$$

$$\mathrm{p}\left(3\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_5 = p_1\cdot q_5^4 + p_2\cdot q_5^5 = 0.2\cdot 7.968032\cdot 10^{-11} + 0.4\cdot 3.2\cdot 10^{-14} = 1.59808\cdot 10^{-14}$$

$$\mathrm{p}\left(4\mathrm{P}_{\text{н деф}}\right)_5 = p_1\cdot q_5^5 = 0.2\cdot 3.2\cdot 10^{-14} = 6.4\cdot 10^{-15}$$

математическое ожидание дефицита мощности:

$$M(P_{н\,деф})_5 = Pн\left[p(P_{н\,деф})_5 + 2P(2P_{н\,деф})_5 + 3P(3P_{н\,деф})_5 + 4P(4P_{н\,деф})_5\right]$$
$$= 100[7.983992 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 1.596801 \cdot 10^{-8} + 3 \cdot 1.59808 \cdot 10^{-11} + 4 \cdot 6.4 \cdot 10^{-15}]$$
$$= 8.0159759 \cdot 10^{-4}\ \text{МВт.}$$

Математическое ожидание перерыва нагрузки по энергии за год:

$$M(W_{деф})_5 = M(P_{н\,деф})_5 \cdot 8760 = 7.0219948[\text{МВт} \cdot \text{час}] = 7021{,}9948[\text{кВт} \cdot \text{час}]$$

Математическое ожидание стоимости ущерба:

$M(З)_5 = M(W_{деф})_5 \cdot З_0$=6994,032·1,2=8426,39 руб.

Годовые расчетные затраты на резервный трансформатор

SB_0=1·B_0+$M(З)_5$=52426,39 руб.

3. Установлено 1 резервных трансформатора S=2, n+S=6

Вычисления дают такие результаты:

$M(P_{деф})_6 = 3{,}200235 \cdot 10^{-6}$МВт;

$M(W_{деф})_6 = 0{,}280341$ кВт.ч;

$M(З)_6 = 0{,}33$ руб.

$SB_0 = 2x44000 = 88000$руб

$З_2 = 8800{,}33$ руб

Ежегодные расчетные затраты здесь выше, чем в предыдущем варианте. Оптимальное число резервных трансформаторов S=1.

Изменение структуры затрат хорошо иллюстрирует таблица:

Число резервных агрегатов	Затраты на резервные агрегаты. Руб.	Ущерб от нагрузки. Руб. $M(3)_5$	Суммарные ежегодные расчетные затраты, руб. Z(S)
0	0	1692306.8	169306.8
1	44000	8426.39	52426.39
2	88000	0.33	88000.33

5. ***КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА***

Контрольная работа состоит из 4 задач. Выбор расчетного варианта осуществяется по номеру в журнале преподавателя.

По третьей от конца цифре номера зачетной книжки выбирается метод расчета соответственно к таблице:

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Метод Задача 1	Независимых токов			Контурных токов		Независимых напряжений				Узловых напряжений
Метод Задача 2	Простой итерации			Итерации Зейделя		Градиента				Ньютона
Метод Задача 3	Эйлера			Эйлера-Коши		Рунге-Кутта				Эйлера

В четвёртой задаче последняя цифра зачетной книжки соответствует порядковому номеру в таблице данных, предпоследняя - порядковому номеру в таблице для $З_0$.

Задача 1.

№ п/п	E_1,В	E_2,В	E_4,В	I_{AC},А	Z_1,Ом	Z_2,Ом	Z_3,Ом	Z_4,Ом	Z_{34},Ом
0	$110e^{j0^0}$	$110e^{-j140^0}$	$500e^{j80^0}$	$15e^{-j80^0}$	$53e^{j30^0}$	$51e^{j40^0}$	$51e^{j40^0}$	$45e^{j70^0}$	j10
1	$127e^{j20^0}$	$110e^{-j60^0}$	$500e^{j160^0}$	$17e^{-j60^0}$	$51e^{j40^0}$	$63e^{j30^0}$	$77e^{j60^0}$	$53e^{j30^0}$	j20
2	$220e^{j40^0}$	$110e^{j0^0}$	$500e^{-j40^0}$	$19e^{-j40^0}$	$49e^{j50^0}$	$43e^{j80^0}$	$35e^{j70^0}$	$33e^{j80^0}$	j13
3	$380e^{j60^0}$	$110e^{j180^0}$	$500e^{-j120^0}$	$21e^{-j20^0}$	$47e^{j60^0}$	$25e^{j70^0}$	$63e^{j80^0}$	$75e^{j70^0}$	j15
4	$500e^{j80^0}$	$110e^{j20^0}$	$500e^{-j120^0}$	$23e^{-j0^0}$	$45e^{j70^0}$	$67e^{j60^0}$	$37e^{j60^0}$	$27e^{j60^0}$	j16
5	$127e^{j100^0}$	$127e^{-j160^0}$	$380e^{j80^0}$	$25e^{j20^0}$	$43e^{j80^0}$	$49e^{j50^0}$	$67e^{j60^0}$	$39e^{j50^0}$	j24
6	$220e^{j120^0}$	$127e^{-j80^0}$	$380e^{j60^0}$	$27e^{-j40^0}$	$57e^{j60^0}$	$31e^{j40^0}$	$33e^{j30^0}$	$43e^{j30^0}$	j13
7	$380e^{j140^0}$	$127e^{j100^0}$	$380e^{j140^0}$	$29e^{j60^0}$	$63e^{j30^0}$	$81e^{j40^0}$	$43e^{j30^0}$	$53e^{j30^0}$	j13
8	$500e^{j160^0}$	$127e^{j20^0}$	$380e^{-j20^0}$	$16e^{j80^0}$	$61e^{j40^0}$	$53e^{j30^0}$	$61e^{j40^0}$	$63e^{j30^0}$	j12
9	$110e^{j180^0}$	$127e^{j40^0}$	$380e^{-j100^0}$	$18e^{j100^0}$	$59e^{j50^0}$	$63e^{j30^0}$	$39e^{j50^0}$	$47e^{j60^0}$	j21
10	$220e^{j0^0}$	$220e^{j0^0}$	$220e^{j60^0}$	$20e^{j120^0}$	$57e^{j60^0}$	$53e^{j80^0}$	$25e^{j70^0}$	$29e^{j50^0}$	j14
11	$380e^{-j20^0}$	$220e^{j0^0}$	$220e^{j40^0}$	$22e^{j120^0}$	$55e^{j70^0}$	$55e^{j70^0}$	$53e^{j80^0}$	$71e^{j40^0}$	j13
12	$500e^{-j40^0}$	$220e^{j120^0}$	$220e^{j120^0}$	$24e^{j160^0}$	$53e^{j80^0}$	$47e^{j60^0}$	$43e^{j30^0}$	$71e^{j40^0}$	j15

Расчитать токи и напряжения во всех ветвях схемы. Правильность решения проверить по первому и второму законам Кирхгофа. Параметры элементов схем приведены в таблицах 5.1 и 5.2:

Продолжение таблицы 5.1

№ п/п	E_1,В	E_2,В	E_4,В	I_{AC},А	Z_1,Ом	Z_2,Ом	Z_3,Ом	Z_4,Ом	Z_{34},Ом
13	$110e^{-j60^0}$	$220e^{j40^0}$	$220e^{j0^0}$	$26e^{j180^0}$	$57e^{j60^0}$	$67e^{j60^0}$	$43e^{j30^0}$	$61e^{j40^0}$	j27
14	$127e^{-j80^0}$	$220e^{j60^0}$	$220e^{j0^0}$	$28e^{j90^0}$	$43e^{j30^0}$	$37e^{j60^0}$	$51e^{j40^0}$	$53e^{j80^0}$	j15
15	$380e^{-j100^0}$	$380e^{-j100^0}$	$127e^{j40^0}$	$30e^{j70^0}$	$41e^{j40^0}$	$29e^{j50^0}$	$49e^{j50^0}$	$45e^{j70^0}$	j14
16	$500e^{-j120^0}$	$380e^{-j20^0}$	$127e^{j20^0}$	$15e^{j50^0}$	$79e^{j50^0}$	$61e^{j40^0}$	$59e^{j50^0}$	$39e^{j50^0}$	j13
17	$110e^{-j140^0}$	$380e^{j140^0}$	$127e^{j100^0}$	$16e^{j30^0}$	$77e^{j60^0}$	$53e^{j30^0}$	$67e^{j60^0}$	$49e^{j50^0}$	j22
18	$127e^{-j160^0}$	$380e^{j60^0}$	$127e^{-j80^0}$	$17e^{-j50^0}$	$75e^{j70^0}$	$37e^{j60^0}$	$33e^{j80^0}$	$81e^{j40^0}$	j18
19	$220e^{j0^0}$	$380e^{j80^0}$	$127e^{-j160^0}$	$18e^{-j70^0}$	$73e^{j80^0}$	$59e^{j50^0}$	$77e^{j60^0}$	$23e^{j80^0}$	j18
20	$110e^{j20^0}$	$500e^{-j120^0}$	$110e^{j20^0}$	$19e^{-j90^0}$	$67e^{j60^0}$	$73e^{j80^0}$	$67e^{j60^0}$	$17e^{j60^0}$	j14
21	$127e^{j40^0}$	$500e^{-j120^0}$	$110e^{j180^0}$	$20e^{-j110^0}$	$53e^{j30^0}$	$75e^{j70^0}$	$47e^{j60^0}$	$57e^{j60^0}$	j23

22	$220e^{j60^0}$	$500e^{-j40^0}$	$110e^{j0^0}$	$21e^{-j130^0}$	$51e^{j40^0}$	$77e^{j60^0}$	$51e^{j40^0}$	$47e^{j60^0}$	j15
23	$380e^{j80^0}$	$500e^{j160^0}$	$110e^{-j60^0}$	$22e^{-j150^0}$	$69e^{j50^0}$	$37e^{j60^0}$	$59e^{j50^0}$	$67e^{j60^0}$	j11
24	$500e^{-j120^0}$	$500e^{j80^0}$	$110e^{-j80^0}$	$23e^{-j170^0}$	$77e^{j60^0}$	$49e^{j50^0}$	$55e^{j70^0}$	$87e^{j60^0}$	j11

Схема 1

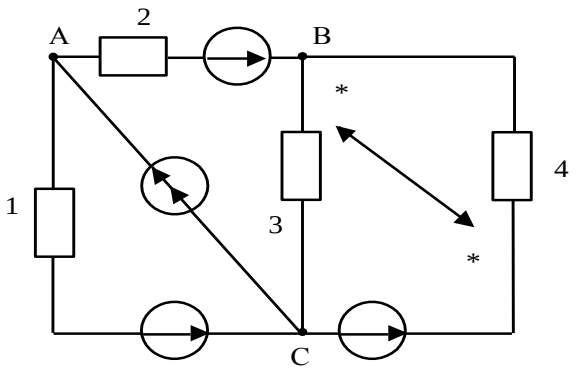


Схема 2

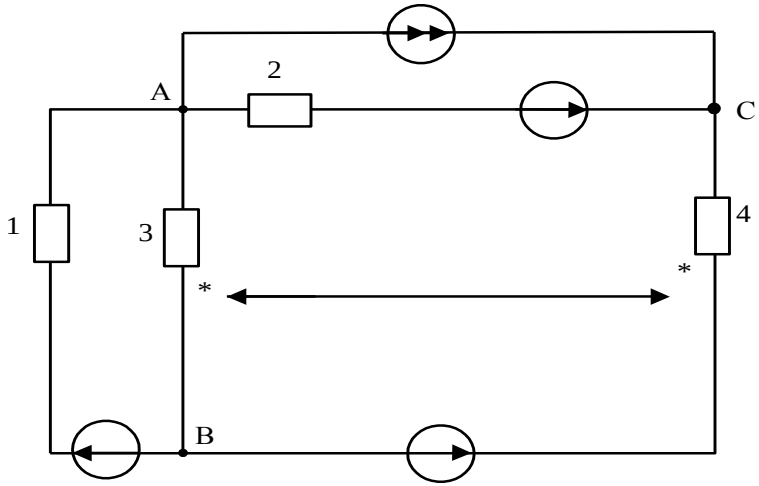


Схема 3

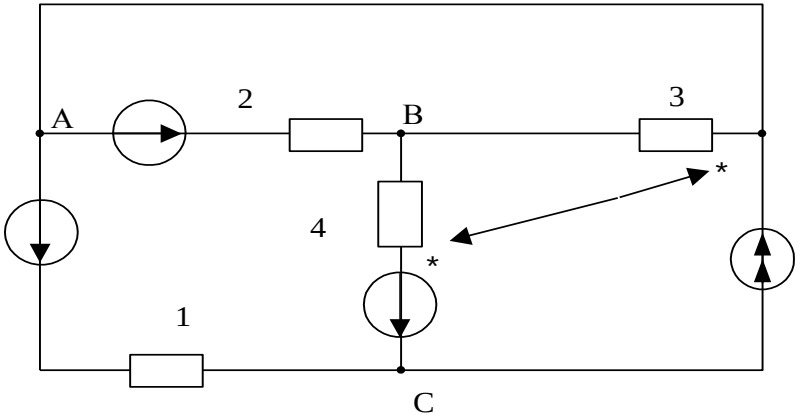


Схема 4

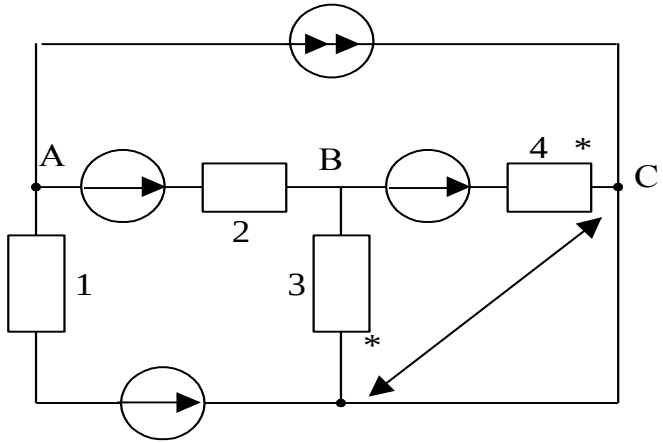
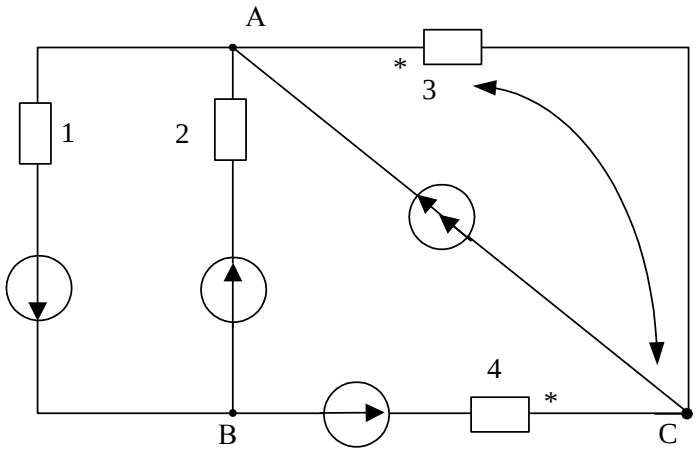


Схема 5



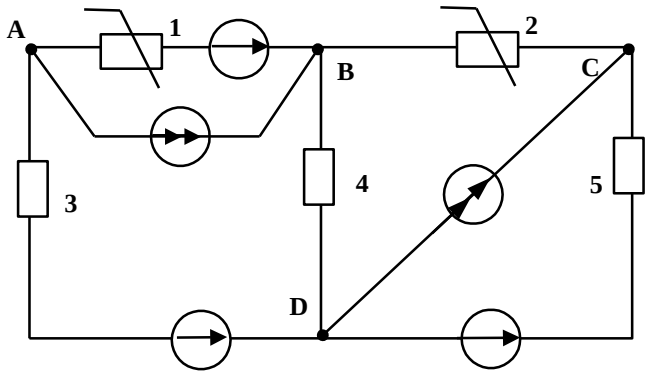
Задача 2.

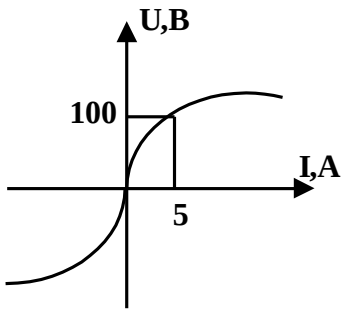
Вычислить токи ветвей контура. Уравнения состояния записать на основе метода контурних токов.

Параметры схем приведены в таблице 5.2. Таблица 5.2 – Исходные данные к задаче 2

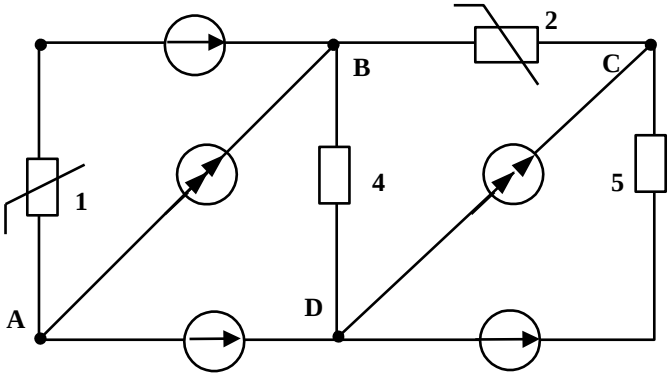
№ п/п	E_1,В	E_3,В	E_5,В	I_{AB},А	I_{DC},А	r_3,Ом	r_4,Ом	r_5,Ом
0	100	120	100	7	8	18	15	28
1	110	130	120	4	7	15	28	27
2	150	140	140	5	5	16	17	15
3	130	150	130	9	6	22	24	24
4	140	160	220	8	9	13	12	12
5	200	220	200	7	8	4	11	24
6	190	175	170	5	5	17	23	15
7	160	180	175	6	8	15	15	19
8	180	150	200	7	7	11	21	16
9	170	130	130	8	5	27	14	22
10	250	220	140	8	9	18	28	25
11	290	200	170	5	6	29	29	28
12	230	100	110	9	8	26	26	17
13	240	110	220	6	6	25	25	24
14	220	140	200	8	8	12	14	11

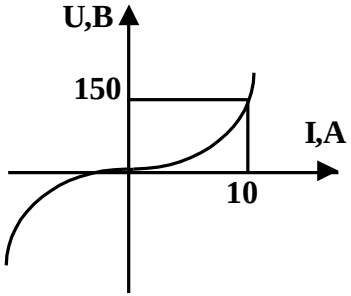
15	175	155	150	7	9	21	21	22
16	185	200	175	5	5	14	12	15
17	270	170	160	6	7	24	23	18
18	280	130	150	8	8	15	15	29
19	260	120	140	5	5	29	19	26
20	215	110	120	8	6	26	15	13
21	235	110	170	9	9	23	27	22
22	255	160	160	6	5	12	18	15
23	210	140	220	5	7	25	24	12
24	220	160	200	8	8	11	15	24



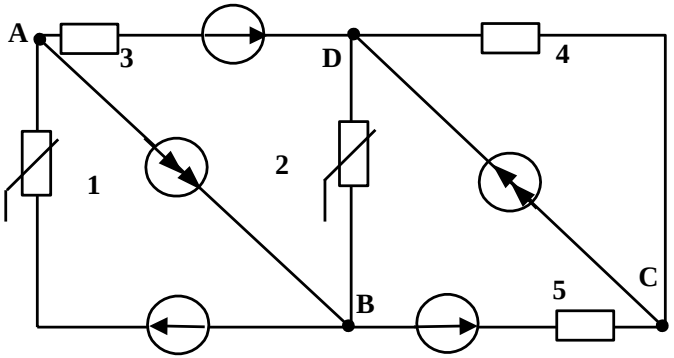


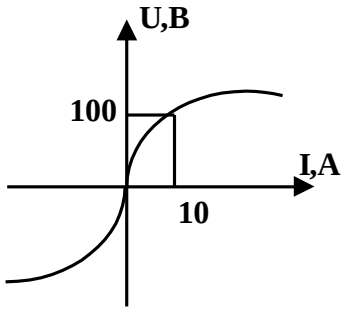
1


2
B
C
1
4
5
A
D

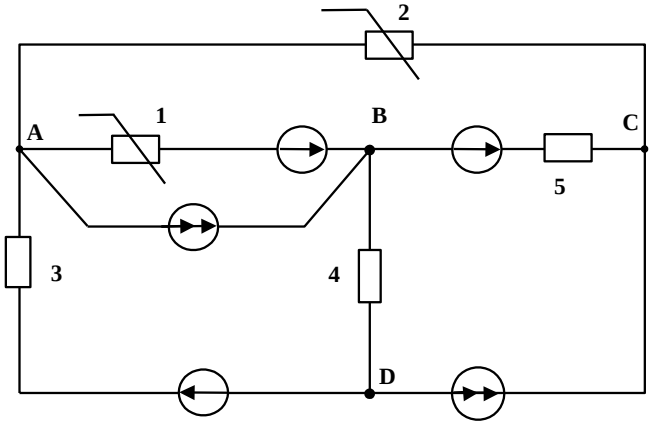

U,B
150
I,A
10

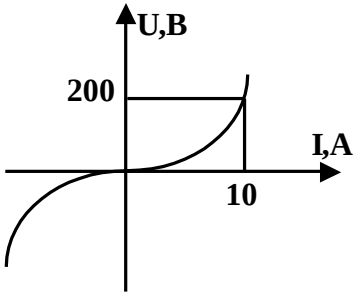
2


A
3
D
4
1
2
C
5
B

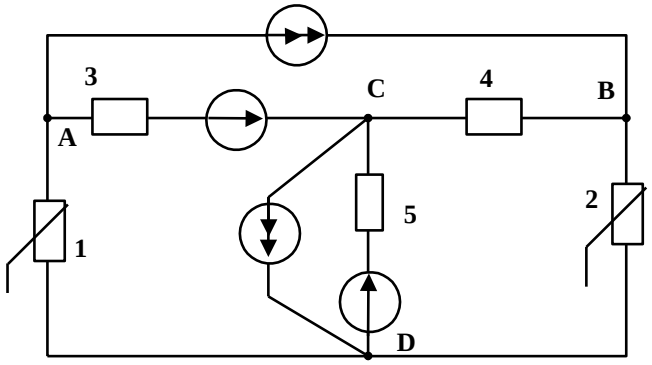

U,B
100
I,A
10

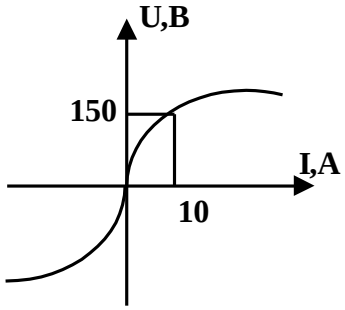
3


2
1
B
C
A
5
3
4
D


U,B
200
I,A
10

4





5

Задача 3.

Вычислить три значения тока в ветви с индуктивностью $\Psi_1(i_1)$и напряжение на ёмкости (u_{C_2})для момента времени t=0, t_1=h, t_2=2h, где h-шаг интегрирования.

Уравнения состояния цепи составить на основании метода контурних токов.

i_0=i_1(0) в момент t_1=0 включение ветви 2. $\Psi_0 = 0{,}005 \cdot i_0$, $\omega = 314c^{-1}$.

Таблица 5.3 – Исходные данные к задаче 3

№	e_1=E_0,В	e_2=$E_m$sin (ωt+α)		i_{AC}=Ic;А	$u_{C_2}(0),B$	r_1,Ом	r_2,Ом	r_3,Ом	r_4,Ом	C_2, мкФ
		E_m,В	α							
0	480	500	120^0	8	100	20	30	20	25	170
1	360	300	-120^0	14	50	25	26	22	30	150

2	400	220	-150^0	14	150	30	21	27	17	270
3	200	450	60^0	12	250	18	10	27	27	200
4	380	400	30^0	10	-150	12	18	14	20	250
5	200	250	90^0	8	-50	12	13	30	17	220
6	220	280	30^0	4	-200	10	18	25	27	300
7	340	480	0^0	14	300	15	21	20	20	110
8	250	380	120^0	4	50	20	10	30	13	150
9	240	500	120^0	8	150	22	20	12	25	130
10	480	260	90^0	8	-50	20	10	22	25	130
11	450	340	-120^0	12	-100	30	30	17	13	300
12	480	440	180^0	6	200	22	23	10	10	220
13	300	350	150^0	10	-200	28	28	28	15	170
14	460	320	60^0	16	-100	20	30	10	23	200
15	260	300	150^0	12	-250	20	16	14	10	250
16	260	420	-150^0	4	-50	30	13	20	27	110
17	350	460	-90^0	10	-300	10	18	10	23	270
18	380	480	0^0	6	250	22	13	12	15	110
19	320	400	-90^0	6	-150	18	30	12	23	150
20	360	200	180^0	8	300	18	21	30	20	130
21	440	480	-30^0	16	200	25	16	17	10	270

22	460	240	-30^0	10	-300	15	16	17	25	170
23	360	200	-60^0	6	50	10	21	14	13	250
24	440	360	-120^0	16	-250	12	28	20	30	200

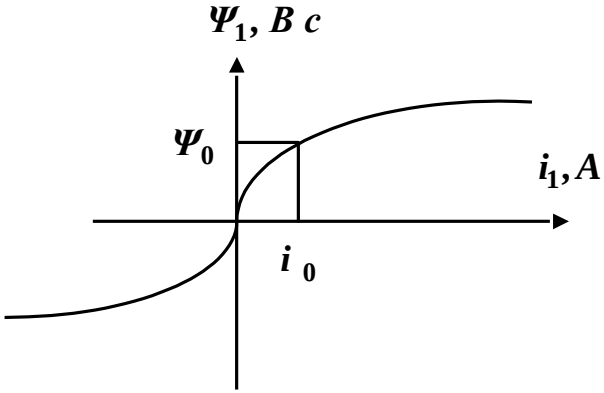


Схема 1

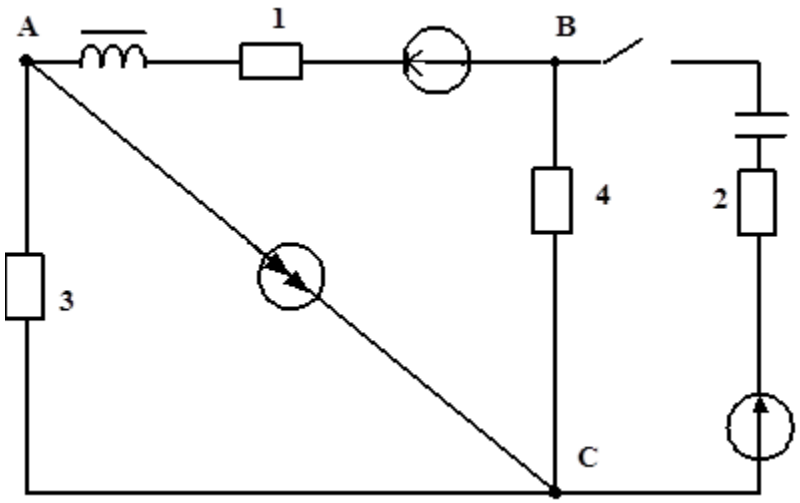


Схема 2

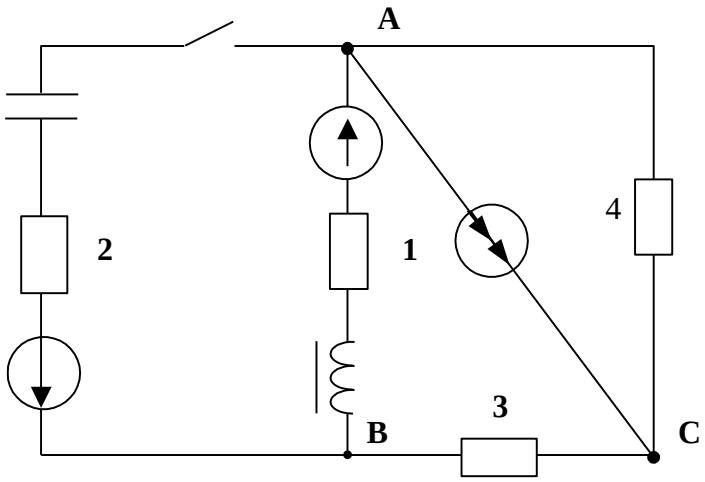


Схема 3

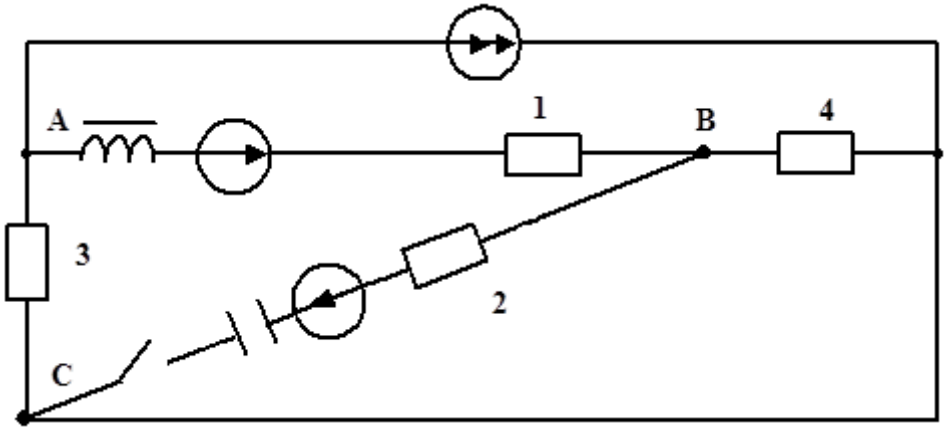


Схема 4

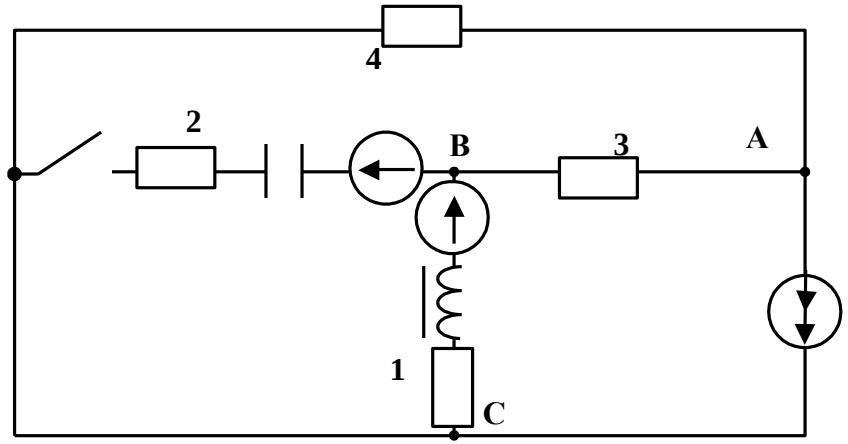
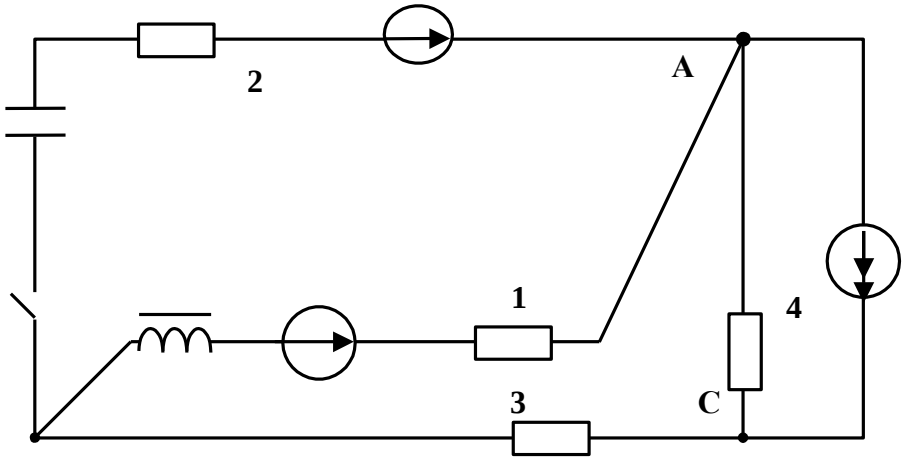


Схема 5



Задача 4.

Определить оптимальное число резервных трансформаторов подстанции, если для обеспечения максимальной мощности нагрузки необходимо n однотипных агрегатов мощности $P_н$ каждый; вероятность повреждения трансформаторов равна q; распределение вероятностей нагрузки заданы в виде ряда P_1, P_2, P_3,…,$P_н$ для мощностей соответственно $nP_н$, $(n\text{-}1)P_н$,…,$P_н$; ущерб от перерыва нагрузки 1 кВт·г составляет $З_0$ грн/кВт·г; годовые расчетные затраты на каждый новый трансформатор составляют K_0 тыс.грн./год.

Все данные приведены в таблице (коэффициент нагрузки составляет единицу)

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$З_0$	1,15	1,18	1,2	1,22	1,24	1,22	1,2	1,18	1,15	1,25	1,17	1,23	1,19

№	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$З_0$	1,2	1,22	1,24	1,22	1,2	1,18	1,15	1,19	1,21	1,23	1,21	1,2

Таблица 5.4 – Исходные данные к задаче 4

№	n	$P_н$, МВА	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	q	K_0

0	4	40	0,2	0,35	0,3	0,15	-	0,0025	33
1	3	63	0,25	0,5	0,25	-	-	0,003	38
2	5	80	0,1	0,35	0,3	0,15	0,1	0,002	40
3	3	100	0,3	0,5	0,2	-	-	0,0025	44
4	4	129	0,15	0,4	0,3	0,15	-	0,002	48
5	5	180	0,1	0,35	0,3	0,15	0,1	0,0018	52
6	5	200	0,15	0,3	0,35	0,1	0,1	0,0015	60
7	3	250	0,4	0,4	0,2	-	-	0,0017	64
8	4	320	0,2	0,35	0,35	0,1	-	0,001	58
9	3	400	0,2	0,6	0,2	-	-	0,0008	76
10	5	40	0,1	0,35	0,35	0,1	0,1	0,0023	33
11	4	63	0,2	0,35	0,35	0,1	-	0,0024	38
12	3	80	0,3	0,35	0,35	-	-	0,0026	40
13	4	100	0,3	0,35	0,25	0,1	-	0,0022	44
14	5	129	0,2	0,35	0,25	0,1	0,1	0,0018	48
15	5	160	0,1	0,35	0,25	0,2	0,1	0,0016	52
16	4	200	0,2	0,25	0,35	0,2	-	0,0017	60
17	4	250	0,3	0,35	0,25	0,2	-	0,0014	64
18	3	320	0,3	0,45	0,25	-	-	0,0014	65
19	3	400	0,1	0,4	0,3	-	-	0,0009	76

20	5	100	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1	0,0021	44
21	4	129	0,2	0,4	0,3	0,1	-	0,002	48
22	5	160	0,1	0,35	0,25	0,2	0,1	0,0016	52
23	4	200	0,2	0,35	0,25	0,2	-	0,0017	60
24	3	250	0,3	0,45	0,25	-	-	0,0013	64

Программа, методические указания и задания к курсовой работе по курсу "Математические задачи электроэнергетики" (для студентов специальности 7.090603)

Составители: Джура Сергей Георгиевич, к.т.н., доцент

Шлепнёв Сергей Владимирович, к.т.н., доцент

Якимишина Виктория Викторовна, к.т.н., доцент